Théorème de Rolle. Applications.

Pré-requis:
- ◇ Notion de continuité et de dérivabilité d'une fonction de variable réelle à valeurs réelles.
- ◇ L'image d'un segment par une application continue à valeurs réelles est un segment.

0.1 Théorème de Rolle.

✎ **Lemme 0.1.1.**
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Si f admet un extremum en un point c de $]a, b[$ on a $f'(c) = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple que f admette un maximum local en c, alors il existe un voisinage V de c tel que

$$\forall x \in]a, b[\cap V, \quad f(x) - f(c) \leq 0.$$

Si $x \geq c$ (il existe car $c \in]a, b[$) alors,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

et si $x \leq c$ alors,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

c'est-à-dire en passant à la limite que

$$0 \leq f'(c) \leq 0$$

donc $f'(c) = 0$. ∎

✎ **Théorème 0.1.2.**
(Théorème de Rolle)
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe alors au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Si f est constante, le résultat est trivial, sinon $m < M$. Puisque $f(a) = f(b)$, l'un des deux extrema est atteint en $c \in]a, b[$ et d'après le lemme, $f'(c) = 0$. ∎

Remarque: Toutes les hypothèses du théorème sont nécessaires, voici quelques contre-exemples significatifs:

- f non continue:

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}.$$

- f non dérivable:

$$f: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}.$$

- f à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$f: \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{it} \end{array}.$$

Proposition 0.1.3.

(i) Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et admettant $f(a)$ pour limite en $+\infty$.
Il existe alors au moins un point c de $]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

(ii) Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et admettant une même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Il existe alors au moins un réel c tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. (i) Si f n'est pas constante sur $[a,+\infty[$, il existe un x_0 dans $[a,+\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple que $f(x_0) > f(a)$ (sinon on raisonne sur $-f$).
Puisque f admet $f(a)$ pour limite en $+\infty$, il existe $A > x_0$ tel que $f(A) < f(x_0)$, posons alors $f([a,A]) = [m,M]$. Il est alors clair que M est atteint en un point de $]a,A[$.

(ii) Traitons le cas où $l = +\infty$. Il existe A strictement positif tel que $|x| > A$ implique $f(x) > f(0)$. Posons alors $f([-A,A]) = [m,M]$. Il est alors clair que m est atteint en un point de $]-A,A[$.

■

Remarque: Il est vain d'espérer étendre le théorème de Rolle aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel, normé de dimension supérieure ou égale à 2.

Soit par exemple F, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie sur $[0,2\pi]$ par $F(t) = (\sin t, \cos t)$. F est dérivable sur $[0,2\pi]$ et $F(0) = f(2\pi)$, mais $F'(t) = (-\sin t, \cos t)$ qui est de norme 1 et donc ne s'annule jamais sur $[0,2\pi]$.

0.2 Applications.

0.2.1 Théorème des accroissements finis.

Théorème 0.2.1.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe c dans $]a,b[$ tel que:

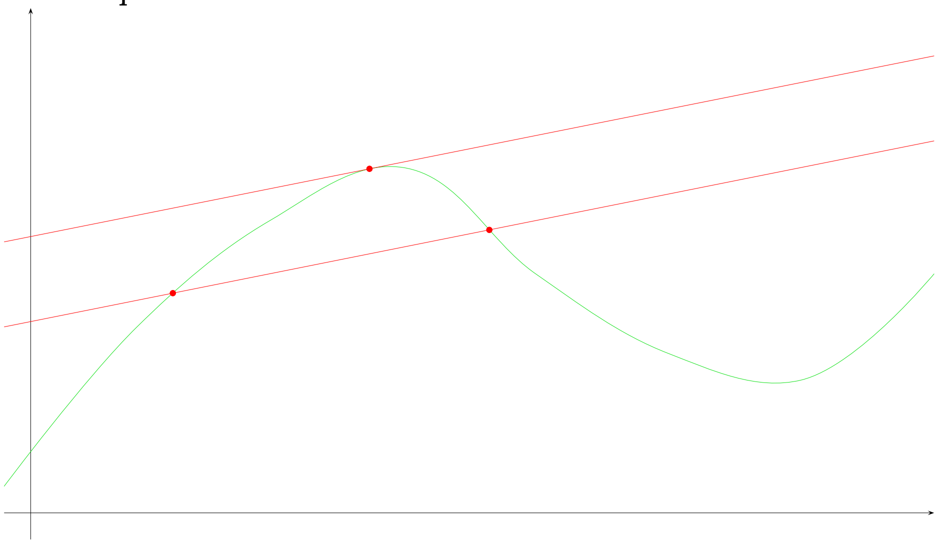
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

$\blacksquare$

Interprétation géométrique: Si le graphe d'une fonction vérifiant les hypothèses du théorème traverse une droite entre deux points, alors il aura une tangente parallèle à cette droite entre ces deux points:



Exercice: Formule de la moyenne par une intégrale:
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$\int_a^b f(t)\, dt = (b - a) f(c).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorèmes des accroissements finis à

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt.$$

$\blacksquare$

0.2.2 Formule de Taylor-Lagrange.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, $n + 1$-fois dérivable sur $]a, b[$. Il existe un point c de $]a, b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ définie sur $[a, b]$ par:

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b - t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + A \frac{(b - t)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

où A est le réel défini par la relation $\varphi(a) = 0$. $\blacksquare$

0.2.3 Polynômes à coefficients réels.

Soit P un polynôme à coefficients réels. Si P est scindé, P' l'est aussi et plus généralement $P' + \alpha P$ pour tout α réel.
Démonstration. On peut écrire:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{\alpha_i}$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n = \mathrm{d}^\circ P \quad (\alpha_i \geq 1).$$

Soit $g(x) = e^{\alpha x} \cdot P(x)$, elle possède les mêmes racines que P (c'est-à-dire les a_i) et

$$g'(x) = e^{\alpha x}(P'(x) + \alpha P(x)),$$

P' admet alors pour racines les a_i avec ordre de multiplicité $\alpha_i - 1$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1) = n - k$ racines.

On applique maintenant le théorème de Rolle à g sur tous les intervalles de la forme $[a_i, a_{i+1}]$ et on trouve alors $k - 1$ racines distinctes des a_i de g', c'est-à-dire de $P' + \alpha P$.

De plus, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, on peut donc encore appliquer le théorème de Rolle sur $]-\infty, a_1]$ afin de trouver une autre racine de $P' + \alpha P$.

On a alors trouvé, $n - k + k - 1 + 1 = n$ racines distinctes de $P' + \alpha P$ qui est de degré n d'où le résultat. ∎