Etude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.

Cadre: Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I. Dans ces conditions, pour tout c appartenant à I, il existe une unique suite u satisfaisant aux relations

$$\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On se propose de dégager quelques résultats généraux permettant d'étudier le comportement asymptotique de cette suite u.

Pré-requis:

- Notions sur les suites numériques; en particulier la monotonie, la convergence (toute suite monotone bornée est convergente)...

Notations: Dans tout ce qui suit, nous désignons par F l'ensemble des points fixes de f,

$$F = \{x \in I | f(x) = x\}$$

et G l'ensemble des points fixes de $g = f \circ f$,

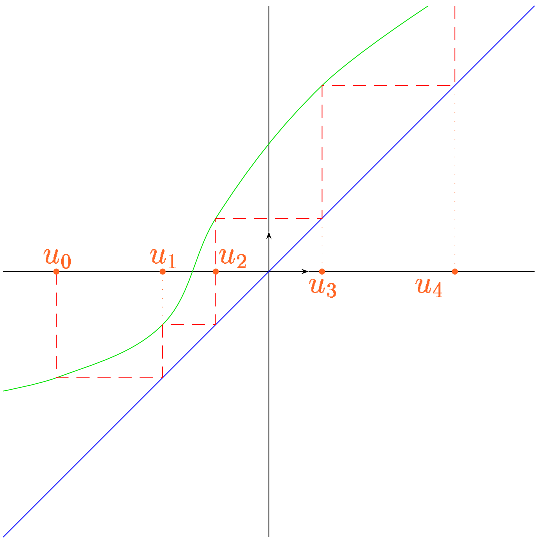
$$G = \{x \in I | g(x) = f(f(x)) = x\}.$$

On notera aussi v et w les suites extraites de u définies respectivement par

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

Rappelons que u est convergente si, et seulement si v et w le sont et ont même limite. Observons aussi que si f est continue sur I, F et G sont des parties fermées de $\mathbb{R}$.

0.1 Visualisation de u.



0.2 Rôle de l'ensemble des fixes de f.

Supposons I fermé et f continue sur I.

Si u est convergente, de limite L, alors un passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ montre que ce nombre L est point fixe de f (en conséquence, une condition nécessaire de convergence de u est l'ensemble F des points fixes de f soit non vide).

0.3 Influence de la monotonie de f sur celle de u. Conséquences sur la convergence de u dans le cas f monotone, continue sur I et I fermé.

Proposition 0.3.1.
Supposons f croissante sur I.

Dans ces conditions u est monotone et plus précisément:
(i) Si $f(u_0) \geq u_0$, alors u est croissante,
(ii) Si $f(u_0) \leq u_0$, alors u est décroissante.

Démonstration. Demontrons par récurrence l'assertion (i):

pour $n = 1$, $u_1 = f(u_0) \geq u_0$.

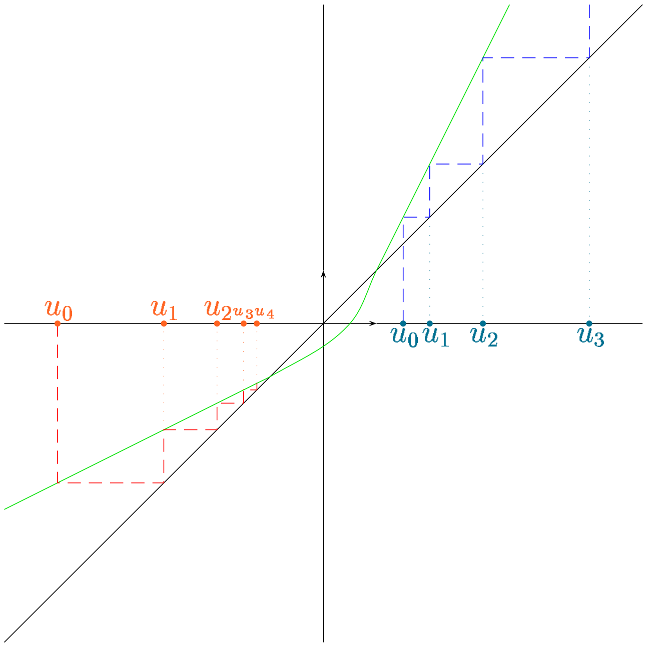
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $u_n \geq u_{n-1}$ et montrons que c'est encore vrai au rang $n+1$: $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1})$ (car f est croissante et par hypothèse de récurrence $u_n \geq u_{n-1}$). Donc $u_{n+1} \geq u_n$.

En conclusion, u est croissante.

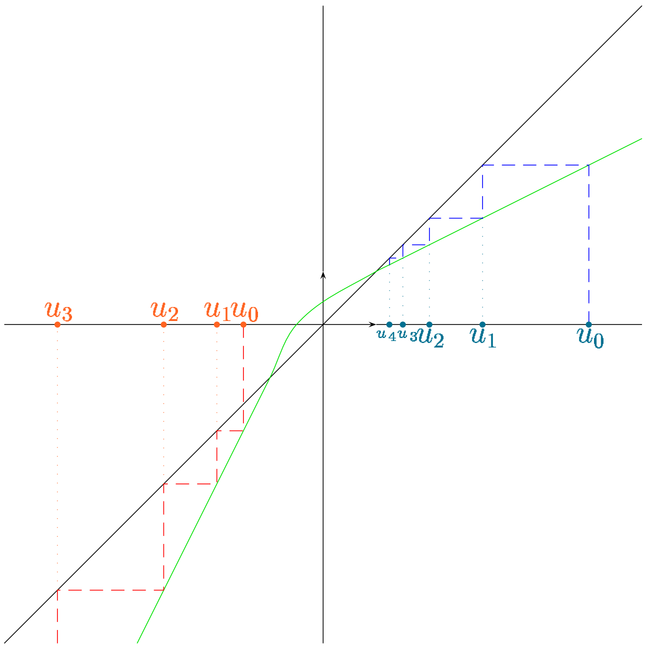
La démonstration est la même pour (ii). ∎

Conséquence: Il en résulte que si I est un segment, la suite u est toujours convergente puisque monotone et bornée (et dans ce cas F est donc non vide).

Si on suppose I fermé, f croissante et continue sur I alors dans le cas (i):
⊛ si $F \cap [u_0, +\infty[$ est vide, $\lim u = +\infty$
⊛ si $F \cap [u_0, +\infty[$ est non vide, u converge en croissant vers le plus petit élément de cet ensemble.



Et dans le cas (ii):
⊛ si $]-\infty, u_0[\cap F$ et vide, $\lim u = -\infty$
⊛ si $]-\infty, u_0[\cap F$ et non vide, u converge en décroissant vers le plus grand élément de cet ensemble.



Exemples: Soit $I = [-2, +\infty[$ et f définie par

$$f(x) = \sqrt{2 + x}.$$

ou encore (la discussion est plus intéressante car il y a trois points fixes) soit $I = \mathbb{R}$ et f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4).$$

Remarque: Supposons f décroissante sur I. Alors $g = f \circ f$ est croissante sur I de sorte que ce qui précède permet d'étudier le comportement des suites extraites v et w (en effet

$v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$):

(i) Si $g(u_0) \geq u_0$, v est croissante et w est décroissante,

(ii) Si $g(u_0) \leq u_0$, v est décroissante et w est croissante.

Le comportement asymptotique de u se déduit alors de celui des suites extraites v et w.

On remarquera que si I est un segment et que f est continue sur I, f possède un unique point fixe a qui est donc aussi élément de G et que dans ces conditions, si G est réduit à $\{a\}$, u converge vers a (convergence dite en spirale).

Exemples: Soit f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par

$$f(x) = (1 - x)^2$$

ou encore celui de la fonction f de $[0, 2]$ dans $[0, 2]$ définie par

$$f(x) = \sqrt{2 - x}.$$

0.4 Analyse de la convergence dans le cas I fermé et f contractante.

Théorème 0.4.1.

Si f est k-contractante et I fermé, f admet un point fixe a et un seul et pour tout c de I, la suite u converge vers a.

Cette convergence est contrôlée par les inégalités $|u_n - a| \leq k^n |c - a|$ et

$$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|.$$

Démonstration. La démonstration est élémentaire dans le cas où I est un segment. Sinon, on montre que la suite u est de Cauchy. ■

Remarque: Dans la pratique, le caractère contractant de f est obtenu dès lors que f est de classe C^1 sur I avec $\sup_{t \in I} |f'(t)| < 1$: cela résulte de l'inégalité des accroissements finis.

Exemple: $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{-x^2}$.

0.5 Rôle du nombre dérivé (voir des nombres dérivés successifs) aux points fixes de f.

Nous supposons ici que f est de classe C^1 sur I et que F est non vide. Soit alors a un point fixe de f.

- Si $|f'(a)| < 1$, il existe un réel r strictement positif tel que l'intervalle $J_r := I \cap [a-r, a+r]$ est stable par f et tel que pour tout c élément de J_r, la suite u de condition initiale c converge vers a (on dit que a est attractif).

La convergence est d'ordre au moins 1, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k > 0$ et un entier n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$,

$$|u_{n+1} - a| \leq k|u_n - a|$$

pour tout c appartenant à l'intervalle d'attractivité.
Dans le cas particulier où $f'(a) = 0$ et si f et de classe C^2 sur I, la convergence est d'ordre au moins 2.

- Si $|f'(a)| > 1$, pour tout c élément de $I \setminus A(a)$ où $A(a)$ est l'ensemble des antécédents successifs de a, autrement dit:

$$A(a) = \{x \in I, \exists p \in \mathbb{N}, f^p(x) = a\},$$

la suite u de condition initiale c ne converge pas vers a.
- Si $f'(a) = 1$, en supposant f de classe C^p sur I $(p \geq 2)$ et telle que $f^{(p)}(a) \neq 0$ et $f^{(k)}(a) = 0$ pour $2 \leq k \leq p$, et en supposant que a est le seul point fixe de f sur I, les conclusions dépendent de la parité de p et du signe de $f^{(p)}(a)$ et sont exactement celles que laissent prévoir un déssin: Cela résulte du développement limité à l'ordre p en a qui donne le signe de $f(x) - x$ au voisinnage de a.

0.6 Etude d'un exemple.

Soit r un réel appartenant à l'intervalle $]0, 4]$ et f l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par

$$f(x) = rx(1 - x).$$

On étudiera suivant les valeurs du paramètre r le comportement de la suite u définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = c$ où c est un élément de $[0, 1]$. En application directe des résultats précédents, on établira en particulier les points suivants:

- Si $r \leq 1$, 0 est l'unique point fixe de f et pour tout c élément de $[0, 1]$, u converge en décroissant vars 0. On évaluera la rapidité de convergence en distinguant les cas $r < 1$ et $r = 1$.
- Si $r > 1$, $F = \{0, a\}$ avec $a = 1 - \frac{1}{r}$. On a $f'(0) = r$ et $f'(a) = 2 - r$. Dans ce cas 0 est répulsif et a est attractif si $r \in]1, 3[$, répulsif si $r > 3$. Il en résulte que, pour $r > 3$, sauf si c appartient à une partie dénombrable A de $[0, 1]$ que l'on précisera, la suite u diverge.
- Si $r \in]1, 2]$, u converge vers a pour tout c élément de $]0, 1[$. On évaluera la rapidité de convergence en distinguant les cas $r \in]1, 2[$ et $r = 2$.
- Si $r \in]2, 3]$, remarquer que a est dans l'intervalle $]0.5, 1[$ et que l'équation $f(x) = 0.5$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]a, 1[$. Justifier que $[0.5, \alpha]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle. En observant que

$$f \circ f(x) - x = rx(a - x)((r^2x^2 - r(1 - r)x + (1 + r)),$$

montrer que si c appartient à $[0.5, \alpha]$, la suite u converge en spirale vers a. Montrer qu'elle converge encore vers a pour toute autre valeur de c dans $]0, 1[$.
Etudier la rapidité de convergence de u en distinguant les cas $r \in]2, 3[$ et $r = 3$.