Etude des suites définies par une relation de récurrence du type: $u_{n+1} = au_n + b$: terme général, discussion selon les valeurs de a et b, somme des premiers termes, comportement asymptotique .... Exemples.

Pré-requis:

- ⋄ $\mathbb{R}$ est archimédien.
- ⋄ Généralités sur les suites numériques (Convergence, divergence, opérations algébriques, composition par une application continue ...).
- ⋄ Le principe de raisonnement par récurrence.

0.1 Introduction.

Imaginons la situation suivante:

Une urne U_1 contient 6 boules blanches et 4 noires. Une autre urne U_2 contient 8 boules blanches et 4 noires. De l'une des urnes on extrait une boule que l'on remet dans l'urne; si la boule tirée est blanche, on recommence le tirage dans la même urne, sinon le tirage est effectué dans l'autre urne. On suppose les tirages équiprobables et on désigne par p_n la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ tirage $(n \geq 1)$ se fasse dans U_1. Déterminer p_n et $\lim p_n$.

Essayons de résoudre le problème:

Si on désigne par B (respectivement N) l'événement "tirer une boule blanche" (respectivement "tirer une boule noire") et par U_1^n l'événement "le $n^{\text{ième}}$ tirage se fait dans l'urne U_1", alors on a pour tout entier n:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(B \cap U_1^n\right) + p\left(N \cap \overline{U_1^n}\right) \\ &= p_n \cdot p\left(B|U_1^n\right) + (1-p_n)p\left(N|\overline{U_1^n}\right) \end{aligned}$$

où $p(A|B)$ désigne la "probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé". On a donc:

$$p_{n+1} = \frac{6}{10}p_n + \frac{2}{10}(1-p_n) \quad \text{soit} \quad 5p_{n+1} = 2p_n + 1.$$

Comme $p_1 = \frac{1}{2}$ on peut déterminer de "proche en proche" p_2, p_3, ... grâce à la formule précédente. Mais encore?

Cet exercice sera entièrement résolu par l'étude qui suit; Il s'agit d'étudier les suites récurrentes définies par des conditions du type:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = au_n + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

0.2 Suites arithmétiques.

Définition 0.2.1.
Une suite réelle u est dite arithmétique si, et seulement si il existe un réel b tel que l'on ait, pour tout entier naturel n:

$$u_{n+1} = u_n + b.$$

Un tel réel est alors unique et est appelé la raison de la suite u.

Les suites arithmétiques se caractérisent par l'expression de leur terme général:

Proposition 0.2.2.
Une suite réelle u est arithmétique de raison b si, et seulement si, pour tout nombre naturel n,

$$u_n = u_0 + nb.$$

Démonstration. C'est une démonstration par récurrence évidente. ∎

Proposition 0.2.3.
Somme des premiers termes d'une suite arithmétique.
Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

Démonstration. Ce résultat se prête naturellement à une démonstration par récurrence. On donnera également la démonstration classique consistant à évaluer le double de la somme cherchée. Enfin on pourra proposer une visualisation de la somme $\sum_{k=0}^{n} k$ sur un quadrillage $n \times n$, ce qui permet le calcul (de même, par une disposition en "équerres emboîtées", on retrouve la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 telle que $u_0 = 1$, c'est-à-dire des premiers nombres impairs). ∎

Proposition 0.2.4 (Monotonie).
Une suite arithmétique de raison b est strictement croissante si $b > 0$, constante si $b = 0$ et strictement décroissante si $b < 0$.

Le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ permet de justifier:

Proposition 0.2.5 (Comportement asymptotique).
Pour une suite arithmétique u de raison b,

$$\lim u = +\infty \text{ si } b > 0 \quad \text{et} \quad \lim u = -\infty \text{ si } b < 0.$$

0.3 Suites géométriques.

Définition 0.3.1.
Une suite réelle u est dite géométrique si, et seulement si il existe un réel a tel que l'on ait, pour tout entier naturel n:

$$u_{n+1} = au_n.$$

Si la suite n'est pas la suite nulle un tel réel est alors unique et est appelé la raison de la suite u.

Les suites géométriques non nulles se caractérisent par l'expression de leur terme général:

Proposition 0.3.2.
La suite réelle u est géométrique de raison a si, et seulement si, u_0 est non nul et pour tout nombre naturel n,

$$u_n = u_0 a^n.$$

Démonstration. C'est une démonstration par récurrence évidente. ∎

Proposition 0.3.3.
Somme des premiers termes d'une suite géométrique.
Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{si } \ a \neq 1$$

et

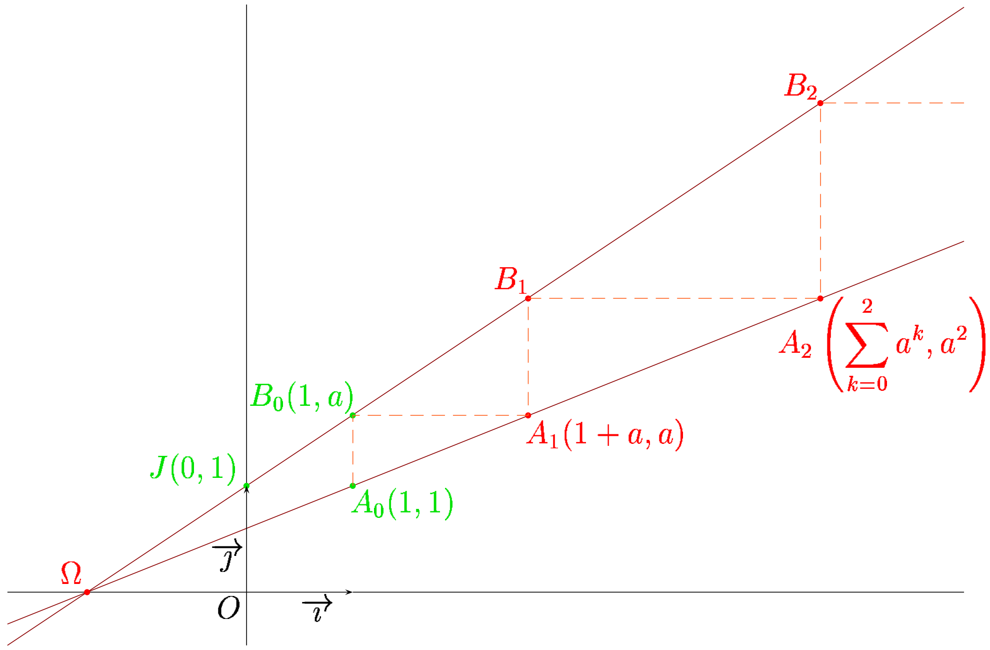
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 \quad \text{si } \ a = 1.$$

Lorsque a est distinct de 1, il est possible de visualiser simultanément la suite de terme général a^n et celle de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$, de la façon suivante: on place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ les points $J(0,1)$, $A_0(1,1)$ et $B_0(1,a)$, ce qui permet de construire Ω, point d'intersection de (JB_0) avec $(O, \overrightarrow{\imath})$ et enfin la suite de point (A_n) et (B_n) définies par les conditions:

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} est le projeté de B_n sur (ΩA_0) selon $\overrightarrow{\imath}$,

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_{n+1} est le projeté de A_{n+1} sur (ΩB_0) selon $\overrightarrow{\jmath}$.

Il est alors aisé d'établir par récurrence que le point A_n a pour coordonnées (s_n, a^n).



Démonstration. Cherchons l'équation cartésienne de la droite (JB_0); $y = \alpha x + \beta$. Puisque (JB_0) passe par $J(0,1)$, $\beta = 1$ et (JB_0) passe par $B_0(1,a)$ alors $\alpha = a - 1$. Par conséquent, l'équation cartésienne de (JB_0) s'écrit:

$$y = (a-1)x + 1.$$

L'intersection Ω de la droite (JB_0) avec l'axe des abscisses a donc pour coordonnées:

$$\Omega\left(\frac{1}{1-a}, 0\right).$$

Cherchons maintenant l'équation cartésienne de la droite (ΩA_0); $y = \alpha' x + \beta'$. Puisque (ΩA_0) passe par $\Omega\left(\frac{1}{1-a}, 0\right)$, on a $0 = \frac{\alpha'}{1-a} + \beta'$ c'est-à-dire $\alpha' = \beta'(a-1)$. De plus, (ΩA_0) passe par $A_0(1,1)$, on a $\alpha' + \beta' = 1$ c'est-à-dire $\beta = \frac{1}{a}$ et donc $\alpha = 1 - \frac{1}{a}$. Par conséquent, l'équation cartésienne de (ΩA_0) s'écrit:

$$y = \left(1 - \frac{1}{a}\right)x + \frac{1}{a}.$$

Montrons par récurrence sur n que l'on a pour tout entier naturel n, $A_n\left(\sum_{k=0}^{n} a^k, a^n\right)$.

Pour $n = 0$, $A_0(1,1)$ répond bien à la condition.

Supposons qu'à un certain rang n fixé, $A_n\left(\sum_{k=0}^{n} a^k, a^n\right)$; d'après l'hypothèse de récurrence, B_n a donc pour abscisse $\sum_{k=0}^{n} a^k$ or B_n est sur (JB_0) donc

$$\begin{aligned}
y_{B_n} &= (a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k + 1 \\
&= -1 + a^{n+1} + 1 \\
y_{B_n} &= a^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition B_{n+1} a pour ordonnée a^{n+1}, or B_{n+1} appartient à (ΩA_0) donc

$$\begin{aligned} a^{n+1} = \left(1-\frac{1}{a}\right)x_{A_{n+1}} + \frac{1}{a} \;&\Leftrightarrow\; a^{n+2}-1 = (a-1)x_{A_{n+1}} \\ &\Leftrightarrow\; x_{A_{n+1}} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1} \\ &\Leftrightarrow\; x_{A_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} a^k \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout naturel n, $A_n\left(\sum_{k=0}^{n} a^k, a^n\right)$. ■

Proposition 0.3.4 (Monotonie).
Soit u une suite géométrique de terme général a^n,

- Si $a = 0$, alors u est stationnaire,
- Si $0 < a < 1$, alors u est strictement décroissante,
- Si $a = 1$, alors u est constante,
- Si $a > 1$, alors u est strictement croissante,
- Si $a < 0$, alors u est alternée et les suites extraites de rang pair et de rang impair sont monotones.

Plus généralement, pour une suite géométrique u de raison a, les résultats précédents sont conservés si $u_0 > 0$ et inversés si $u_0 < 0$.

Proposition 0.3.5 (Comportement asymptotique).
La suite géométrique de terme général a^n converge vers 0 si $|a| < 1$, vers 1 si $a = 1$ et diverge sinon.
Plus précisément,

- Si $a > 1$ elle diverge vers $+\infty$,
- Si $a = -1$, les suites extraites de rang pair et de rang impair convergent respectivement vers 1 et vers -1,
- Si $a < -1$, les suites extraites de rang pair et de rang impair divergent respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Plus généralement, pour une suite géométrique u de raison a, les résultats précédents sont conservés si $u_0 > 0$ et inversés si $u_0 < 0$.

Démonstration. Pour justifier ces comportements asymptotiques, on pourra commencer par établir que $\lim a^n = +\infty$ si $a > 1$ en démontrant par récurrence l'inégalité suivante:

$$a^n \geq 1 + n(a-1).$$

■

0.4 Suites arithmético-géométriques.

Définition 0.4.1.
Une suite réelle u est dite arithmético-géométrique s'il existe un couple (a, b) de réels tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque: Les suites géométriques et arithmétiques apparaissent comme des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

L'étude des suites arithmético-géométriques se ramène immédiatement à celle des suites arithmétiques ou géométriques: toute suite arithmético-géométrique qui n'est pas arithmétique est en effet somme d'une suite constante et d'une suite géométrique. Plus précisément, si $a \neq 1$, on a pour tout entier naturel n, on cherche le point fixe de $x \mapsto ax + b$; c'est $\frac{b}{1-a}$ et on obtient:

$$u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n.$$

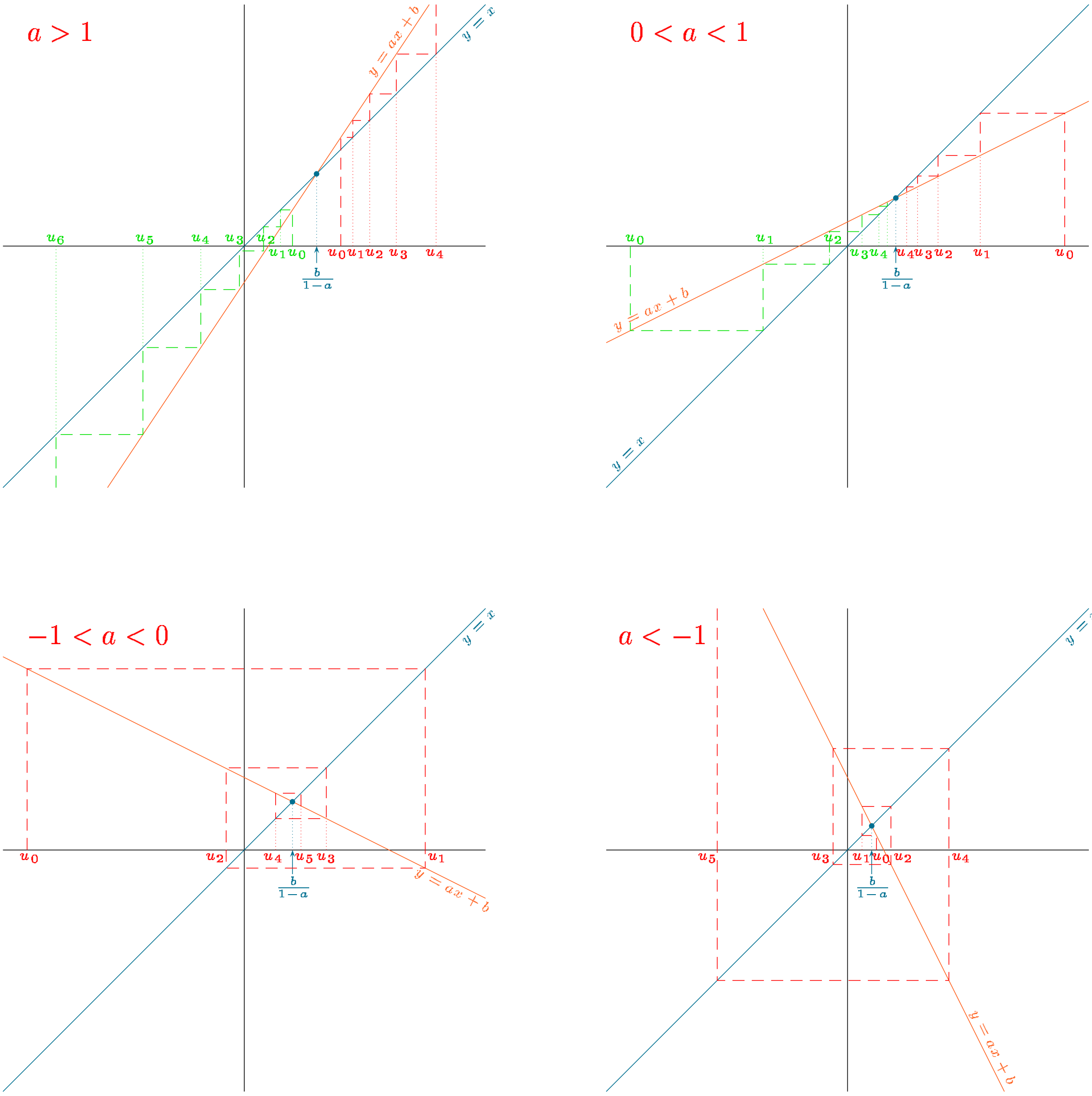
Ainsi dans notre exemple d'introduction, on obtient

$$p_n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \left(p_1 - \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

d'où $\lim p_n = \frac{1}{3}$.

0.5 Visualisation des suites arithmético-géométriques.

Les suites arithmético-géométriques sont du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une application affine. Elles sont donc susceptibles d'une représentation graphique que l'on donnera, les différents cas de figure étant conditionnés par la position de a par rapport aux réels -1, 0, 1 et (lorsque a est distinct de 1) par la position de u_0 par rapport aux points fixes de f qui n'est autre que $\frac{b}{1-a}$.



On remarquera que ce point est attractif si $|a| < 1$, répulsif si $|a| > 1$, ni attractif, ni répulsif si $a = -1$.

0.6 Les suites arithmético-géométrique dans le champ complexe.

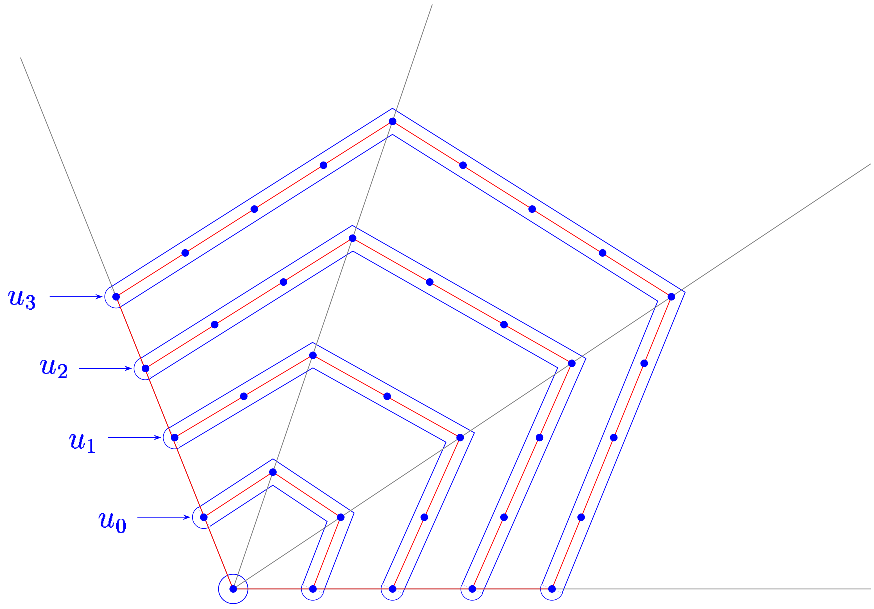
Tout ce qui a été dit précédemment, hormis bien sûr ce qui concerne la monotonie, la divergence vers $+\infty$ et les diverses visualisations graphiques, reste valable, dans le champ complexe.

0.7 Exemples d'intervention.

0.7.1 Dénombrement.

- Nombre maximal de régions déterminées par n droites du plan.
- Nombres figurés:
  Considérons un pentagone régulier P_1 de côté 1 et soit O l'un de ses sommets. Pour tout entier naturel k, notons P_k l'image de P_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k puis marquons sur chaque coté de P_k tous les points qui subdivisent régulièrement ce côté en segments de longueur 1.
  On appelle $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal l'entier p_n qui compte le nombre total de points obtenus sur la figure réunion des pentagones P_1, P_2, $\ldots$, P_n.

  Démonstration. Soit u la suite définie par $u_k = p_{k+1} - p_k$ (en prenant $p_0 = 1$).



En interprétant géométriquement u, on observera qu'elle est arithmétique de raison 3, ce qui permet d'établir que

$$p_n = \frac{(n+1)(2+3n)}{2}.$$

∎

Plus généralement, en partant d'un polygone régulier P_1 à m côtés, on définirait de même la notion de $n^{\text{ième}}$ nombre figuré d'ordre m. Le même raisonnement permet d'établir qu'il est égal à

$$\frac{(n+1)(2+(m-2)n)}{2}.$$

0.7.2 Epargne.

Capitalisation à intérêts composés par versements mensuels constants:

Soit i % le taux mensuel des intérêts, c_0 la somme initialement déposée, S la somme versée à la fin de chaque mois, c_n l'état du compte à l'issue de ce versement à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois. On a alors, pour tout naturel n,

$$c_{n+1} = \left(1 + \frac{i}{100}\right) c_n + S,$$

ce qui permet le calcul de c_n en fonction de n, c_0, S et i.

Exercice: Une somme s_0 est empruntée à intérêts composés (taux mensuel i %) et est remboursable en n mensualités constantes, quel est le montant de ces mensualités?

0.7.3 Majoration de l'écart dans une approximation d'un point fixe.

Soit f une application k-contractante d'un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ dans I. Alors f admet un unique point fixe α dans I et pour tout c dans I, la suite u définie par les conditions $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n naturel fournit des valeurs approchées de α contrôlées par:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$

ou encore par

$$|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|.$$

Démonstration. Il est clair que f admet au plus un point fixe (écrire l'inégalité de contraction portant sur deux points fixes éventuels). Soit ensuite c un élément de I et u la suite définie par $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On établit d'abord que $|u_{r+1} - u_r| \leq k^r|u_1 - u_0|$ pour tout r naturel, ce qui valide la majoration

$$|u_{n+p} - u_n| \leq k^n\frac{1-k^p}{1-k}|u_1 - u_0| \quad (1).$$

Ceci montre que la suite est de Cauchy (car $0 \leq k < 1$). Mais $\mathbb{R}$ est complet: u est donc convergente et sa limite α est dans I car I est fermé. Un passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ montre que α est point fixe de f (f contractante implique f continue). Il suffit ensuite de faire tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité (1) pour obtenir la première inégalité annoncée. La seconde s'obtient par récurrence en utilisant l'égalité $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$ et le caractère k-contractant de f. ■

0.7.4 Calcul de sommes "trigonométriques".

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx), \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(kx).$$

0.7.5 Suites homographiques.

a, b, c, d étant des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$, soit f l'application définie par:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases} \end{array}.$$

L'application f est bijective et admet un ou deux points fixes, qui sont éléments de $\mathbb{C}$. Notons E l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ de la forme $(f^{-1})^n(\infty)$ où n est un naturel. Alors les conditions $u_0 \in \mathbb{C} \subset E$ et, pour tout n naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$, définissent une famille de suites complexes dont on peut expliciter le terme de rang n en fonction du terme de rang zéro en remarquant que:

(i) si f admet deux points fixes α et β et si $u_0 \neq \beta$, la suite complexe v définie par

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

est géométrique, de raison

$$\frac{c\beta + d}{c\alpha + d},$$

(ii) si f admet un seul point fixe α et si $u_0 \neq \alpha$, la suite complexe v définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

est arithmétique, de raison

$$\frac{2c}{a+d}.$$

Démonstration. (i) Soient α et β deux points fixes de f avec $\alpha \neq u_0$. Montrons que la suite v de terme général $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est géométrique:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} \\
&= \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{f(u_n) - f(\beta)} \\
&= \frac{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\beta + b}{c\beta + d}} \\
&= \frac{\dfrac{acu_n\alpha + adu_n + bc\alpha + bd - acu_n\alpha - bcu_n - ad\alpha - bd}{(cu_n + d)(c\alpha + d)}}{\dfrac{acu_n\beta + adu_n + bc\beta + bd - acu_n\beta - ad\beta - bcu_n - bd}{(cu_n + d)(c\beta + d)}} \\
&= \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \cdot \frac{ad(u_n - \alpha) + bc(\alpha - u_n)}{ad(u_n - \beta) + bc(\beta - u_n)} \\
&= \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \cdot \frac{ad - bc}{ad - bc} \cdot \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \\
v_{n+1} &= \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \cdot v_n
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
f(z) = z \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{az + b}{cz + d} = z \\
&\Leftrightarrow \quad az + b = cz^2 + dz \\
&\Leftrightarrow \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0
\end{aligned}$$

Son discriminant $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$.
Si α est le seul point fixe de f, alors $\Delta = 0$ et $\alpha = \frac{a-d}{2c}$.

Montrons que $\frac{1}{f(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + k$ où k est une constante:
Posons, $w = z - \alpha$ et $t = f(z) - \alpha$ alors,

$$
\begin{aligned}
f(w+\alpha) = t+\alpha \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{a\left(w + \dfrac{a-d}{2c}\right) + b}{c\left(w + \frac{a-d}{2c}\right) + d} = t + \frac{a-d}{2c} \\
& \Leftrightarrow \quad aw + a \cdot \frac{a-d}{2c} + b = cwt + t \cdot \frac{a-d}{2} + dt + w \cdot \frac{a-d}{2} \\
& \qquad\qquad + d \cdot \frac{a-d}{2c} + \frac{(a-d)^2}{4c} \\
& \Leftrightarrow \quad cwt + \underbrace{\frac{a-d}{2}(t+w)}_{\frac{at+aw+dt-dw}{2}} + \frac{a-d}{2c}(d-a) + dt - aw + \frac{(a-d)^2 - 4bc}{4c} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad cwt + \frac{at - aw + dt - dw}{2} \\
& \qquad\qquad + \frac{2ad - 2a^2 - 2d^2 + 2da + a^2 - 2ad + d^2 - 4bc}{4c} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \quad cwt + \frac{(a+d)(t-w)}{2} - \frac{a^2 - 2da + d^2 + 4bc}{4c} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad cwt + \frac{(a+d)(t-w)}{2} - \underbrace{\frac{(a-d)^2 + 4bc}{4c}}_{=0} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad c + \frac{a+d}{2w} = \frac{a+d}{2t} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{w} + \frac{2c}{a+d} \quad \text{si } a+d \neq 0 \\
f(w+\alpha) = t+\alpha \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{2c}{a+d}
\end{aligned}
$$

Supposons que $a+d=0$, alors $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = 4a^2 + 4bc = 0$ c'est-à-dire $a^2 + bc = 0$ ainsi $ad - bc = ad + a^2 = a(d+a) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $a+d \neq 0$.

■