Suites convergentes. Opérations algèbriques sur les limites. Composition par une fonction continue. Comparaison de suites entre elles.

Cadre: Les suites réelles (On pourra voir à la fin comment les propriétés développées se prolongent dans le cadre complexe).

Point de vue axiomatique: $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné vérifiant l'axiome de la borne supérieure (un tel corps vérifie la propriété d'Archimède).

Pré-requis:
- ◇ La notion de suite réelle.
- ◇ La notion de continuité d'une fonction.
- ◇ De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.

0.1 Suites réelles convergentes.

Définition 0.1.1.
Une suite réelle u est dite *convergente* s'il existe un réel l tel que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Remarques:
- ◇ Le nombre l est unique et est appelé *limite* de la suite u et est noté $\lim u$ (ceci se démontre facilement à l'aide de l'inégalité triangulaire).

  Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe l' tel que $l \neq l'$.
  Soit $\varepsilon = \frac{1}{4}|l - l'| > 0$ alors il existe n_0 et n_1 dans $\mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$ et $n \geq n_1$, $|u_n - l'| < \varepsilon$ donc pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|u_n - l'| < \varepsilon$. Or

  $$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|l - l'|$$

  donc $|l - l'| < 0$ ce qui est absurde. ∎

- ◇ Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:
  1. u est convergente de limite l.
  2. La suite de terme général $(u_n - l)$ est convergente de limite nulle.
  3. La suite de terme général $|u_n - l|$ est convergente de limite nulle.

On peut donc toujours ramener le problème de la convergence vers l d'une suite réelle à celui de la convergence vers 0 d'une suite à termes positifs. Ceci justifie la:

Proposition 0.1.2.
Soit u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$ alors si v converge vers 0, il en est de même pour u.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ $|v_n| < \varepsilon$ or $|u_n| \leq v_n$ donc $|u_n| \leq |v_n| < \varepsilon$. ■

Il est alors interressant de disposer de suites réelles positives convergent vers 0, le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ nous en fournit deux grandes familles:

- ◇ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite de terme général $\frac{1}{n^p}$.
- ◇ Pour tout réel a tel que $|a| < 1$, la suite de terme général a^n. (Pour démontrer celui-ci il me faut une proposition que je donnerai ultérieurement).

Démonstration. ◇ Soit $\varepsilon^p > 0$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ d'où $\forall n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n_0^p} < \varepsilon^p.$$

◇ Pour $|a| > 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|a| = 1 + \alpha$, ainsi $|a|^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. D'après la propriété d'Archimède, ceci n'est pas borné et donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
Pour $|a| < 1$, $u_n = |a|^n$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers l, or $u_{n+1} = au_n$ alors en passant à la limite dans cette égalité, on obtient que $l = al$, c'est-à-dire $l = 0$.

■

Signalons une généralisation de la proposition précédente:

Théorème 0.1.3.
Théorème dit d'encadrement
Soient u, v, w trois suites réelles. Si on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$$

et que u et w convergent vers la même limite l alors v converge vers l.

Démonstration. On a, $u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$ donc $|v_n - l| \leq \max(u_n - l, w_n - l)$. ■

Nous allons maintenant donner deux conditions necessaires de convergence souvent utilisées pour montrer qu'une suite ne converge pas:

Propriétés 0.1.4.
Si u est une suite convergente, alors:

1. u est bornée.
2. Toute suite extraite de u est convergente, de même limite que u.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$ c'est-à-dire $-\varepsilon + l < u_n < \varepsilon + l$ et pour $n < n_0$ il suffit de voir que $u_n \leq \max_{i<n_0}(u_i)$.

2. Soit $u_{\varphi(n)}$, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante; il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n_k) \geq n_0$ donc $\forall n \geq n_k$, $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon$.

■

Exemples: La suite de terme général n et la suite de terme général $(-1)^n$ ne convergent pas.

Nous allons donner une importante catégorie de suite convergentes qui permettent d'aboutir au critère de Cauchy:

Proposition 0.1.5.
Un suite croissante (respectivement décroissante) majorée (respectivement minorée) est convergente.

Démonstration. Supposons u croissante majorée. L'ensemble $\{u_n : n \geq 1\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc d'après l'axiome de la borne supérieure, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq l$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq l - \varepsilon$ (car u est croissante) ainsi, $\forall n \geq n_0$, $-\varepsilon < u_n - l \leq 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

■

Théorème 0.1.6.
Critère de Cauchy
Une suite u de réels est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geq n_0,\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $|u_m - u_n| \leq |u_m - l| + |l - u_n|$, donc soit $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$ impliquent

$$|u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si u est une suite de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq N$ et $m \geq N$ impliquent $|u_n - u_m| < 1$. En particulier, pour $m = N$, $n \geq N$ implique que $|u_n - u_N| < 1$ c'est-à-dire $|u_n| < 1 + |u_N|$. Soit $M := \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}, 1 + |u_N|)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$ donc toute suite de Cauchy est bornée. Or de toute suite on peut extraire une suite monotone $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. La suite v est alors monotone et bornée, d'après la proposition précédente v converge vers l. Soit $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$,

$$n \geq n_1 \text{ et } m \geq n_1 \Rightarrow |u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq |u_n - v_n| + |v_n - l| \\ &\leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + |v_n - l| \end{aligned}$$

Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n_2) \geq n_1$ et $n_2 \geq \max(n_0, n_1)$ alors $\forall n \geq n_2$,

$$|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Le critère de Cauchy est surtout utile lorsque l'on ne connait pas la limite de u.

0.2 Opérations sur les limites.

Propriétés 0.2.1.
Si u et v sont deux suites réelles convergentes vers l et l' et k un nombre réel, alors
- $u+v$ converge vers $l+l'$.
- ku converge vers kl.
- uv converge vers ll'.
- Si u converge vers une limite l non nulle, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \neq 0$ et la suite de terme général $\frac{1}{u_{n_0+n}}$ converge vers $\frac{1}{l}$.

Démonstration. Les deux première assertions sont évidentes.

Pour la troisième, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (u_n - l) \cdot (v_n - l') &= u_n v_n - u_n l' - v_n l + ll' \\ &= u_n v_n - ll' - l'(u_n - l) - l(v_n - l') \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &< |u_n - l| \cdot |v_n - l'| + |l'| \cdot |u_n - l| + |l| \cdot |v_n - l'| \\ &< \varepsilon^2 + \varepsilon(|l'| + |l|) \quad \text{pour } n \geq n_0 \end{aligned}$$

Pour la dernière assertion, il suffit simplement d'écrire

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n l|} < K\varepsilon$$

car u est bornée. ∎

0.3 Composition par une application continue.

Théorème 0.3.1.
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et u une suite dont les termes sont dans D et convergent vers x_0 dans D. Si f est continue en x_0, alors la suite $f \circ u$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors par continuité de f en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Or il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - x_0| < \eta$ d'où $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. ∎

Ce résultat sert en particulier dans le contexte d'une suite définie par une relation de récurrence.

0.4 Comparaison de suites entre elles.

Proposition 0.4.1.
Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives l et l'.
Si $l < l'$ alors
$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ u_n < v_n.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon = \frac{l'-l}{2} > 0$ alors il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $-\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$ et $-\varepsilon < v_n - l' < \varepsilon$ donc
$$-2\varepsilon < u_n - v_n + l' - l < 2\varepsilon$$
c'est-à-dire
$$0 < v_n - u_n < 4\varepsilon.$$
∎

Par conséquent, on obtient:

Corollaire 0.4.2.
Théorème de prolongement des inégalités.
Soient u et v deux suites convergentes de limites l et l':
$$\text{Si } \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ u_n \geq v_n \text{ alors } l \geq l'.$$

Démonstration. Se démontre par l'absurde en utilisant la proposition précédente. ∎

Définition 0.4.3.
Relations de comparaisons asymptotiques
On dit que u est *dominée* par v (respectivement *négligeable* devant v, respectivement *équivalente* à v) si il existe une suite ε bornée (respectivement convergent vers 0, respectivement convergent vers 1) et un entier p tel que
$$\forall n \geq p, \quad u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Ces relations permettent de comparer la vitesse de convergence.
Exemples: Les suites de termes généraux $\frac{1}{n!}$, $\frac{1}{a^n}$ et $\frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont rangées dans cet ordre pour la relation de négligeabilité.

0.5 Suites à valeurs complexes.

Définition 0.5.1.
Une suite u à valeurs complexes est dite convergente vers $l \in \mathbb{C}$, si la suite réelle de terme général $|u_n - l|$ converge et est de limite nulle.

Remarque: u converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re} l$ et $\operatorname{Im} l$.

On se convainc aisément que les résultats énoncés sur les suites réelles (ormis le théorème d'encadrement et celui sur les suites monotones) restent valable dans $\mathbb{C}$.

Exemple: Les suites géométriques de terme général z^n convergent si et seulement si $z = 1$ ou $|z| < 1$.