

# Suites monotones, suites adjacentes. Application à l'approximation d'un nombre réel, en particulier au développement décimal.

**Cadre:** Nous prenons pour cadre de cet exposé les suites réelles.

**Point de vue axiomatique:**  $\mathbb{R}$  est un corps commutatif totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure (rappelons qu'un tel corps est nécessairement archimédien, ce qui permet en particulier de définir la fonction partie entière, que nous noterons  $[\cdot]$ ).

**Pré-requis:**

◇ Définitions de suite numérique et de suite convergente.

## 0.1 Suites monotones.

**Définition 0.1.1.**

Une suite numérique  $u$  est dite croissante si, et seulement si pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$ , la relation  $p \leq q$  implique  $u_p \leq u_q$ .

Une suite numérique  $u$  est dite décroissante si, et seulement si  $-u$  est croissante.

Une suite numérique est dite monotone si, et seulement si elle est soit croissante, soit décroissante.

**Remarque:** Pour montrer qu'une suite  $u$  est croissante, il suffira, par exemple, de vérifier que pour tout naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  ou encore, si la suite est à termes strictement positifs, que  $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1$  pour tout  $n$  naturel.

**Théorème 0.1.2.**

De toute suite, on peut extraire une suite monotone.

*Démonstration.* Soit  $u$  une suite numérique quelconque. On dira que  $i$  est un indice pic pour  $u$  si, et seulement si pour tout  $j > i$ ,  $u_j < u_i$ .

Notons  $E$  l'ensemble de tous les indices pics de la suite  $u$ .

- Si  $E$  est infini, notons  $i_k$  les éléments de  $E$  de sorte que  $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_n < \dots$ . Définissons la suite  $v$  par  $v_n = u_{i_n}$ . Puisque  $i_n$  est un indice pic pour  $u$ ,  $u_{i_{n+1}} < u_{i_n}$  c'est-à-dire  $v_{n+1} < v_n$ .  $v$  est donc strictement décroissante et extraite de  $u$ .
- Si  $E$  est fini, soit alors  $p_0$  un entier majorant strictement  $E$  et posons  $v_0 = u_{p_0}$ .  $p_0$  n'est pas un indice pic, donc il existe  $p_1 > p_0$  tel que  $u_{p_1} \geq u_{p_0}$ . Posons  $v_1 = u_{p_1}$ , on obtient alors  $v_1 \geq v_0$ .  $p_1$  n'est pas un indice pic (car strictement supérieur au majorant strict de  $E$ ) donc il existe  $p_2 > p_1$  tel que  $u_{p_2} \geq u_{p_1}$ , on pose alors  $v_2 = u_{p_2}$  qui est supérieur à  $v_1$ . En itérant le procédé on construit une suite croissante d'indice  $p_n$  tels qu'en posant  $v_n = u_{p_n}$  pour tout naturel  $n$  on obtient une suite  $v$  croissante, extraite de  $u$ . ■

### Proposition 0.1.3.

*Monotonie et opérations:*

Si  $u$  et  $v$  sont croissantes,  $u + v$  l'est aussi, ainsi que  $\lambda u$  pour tout réel  $\lambda$  positif.

### Proposition 0.1.4.

*Monotonie et convergence*

Soit  $u$  une suite croissante; Si elle est majorée, elle converge et  $\lim u = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  (en particulier, tous ses termes sont majorés par sa limite et même strictement majorés par sa limite si la suite est strictement croissante), sinon elle diverge et  $\lim u = +\infty$ .

*Démonstration.*  $u$  est majorée, donc l'ensemble  $\{u_n\}$  des valeurs de la suite est majorée et non vide; la propriété de la borne supérieure nous dit qu'il existe  $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$  et que pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe  $N$  tel que  $u_N \geq l - \varepsilon$ , or  $u$  est croissante donc  $u_N \leq u_p$  pour tout  $p \geq N$  ainsi quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  vérifiant  $n \geq N$ ,  $u_n \geq l - \varepsilon$  c'est-à-dire  $|u_n - l| < \varepsilon$ . ■

Comme application de ce résultat, on obtient:

### Théorème 0.1.5.

*de Bolzano-Weierstrass*

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

*Démonstration.* Soit  $u$  une suite numérique bornée, d'après le théorème précédent, on peut en extraire une suite  $v$  monotone qui sera encore bornée donc convergente. ■

## 0.2 Suites adjacentes.

### Définition 0.2.1.

Deux suites numériques  $u$  et  $v$  sont dites adjacentes si, et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et si  $u - v$  est convergente de limite nulle.

### Proposition 0.2.2.

Deux suites adjacentes  $u$  et  $v$  sont convergentes, de même limite  $L$ . Si on suppose de plus que c'est  $u$  qui est croissante, on a, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \leq L \leq v_n.$$

*Démonstration.* Démontrons cette proposition dans le cas où  $u$  est croissante. Alors,  $v - u$  est décroissante, étant de limite nulle, elle est minorée par 0, ce qui prouve que pour tout  $n$  naturel,  $u_n \leq v_n$  et les croissances respectives de  $u$  et  $v$  nous indiquent qu'en fait  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ . Ainsi, la suite  $u$  est croissante, majorée, donc convergente; soit  $L$  sa limite. De même  $v$  converge vers un réel  $L'$ . Puisque  $v - u$  est de limite nulle,  $L' - L = 0$  c'est-à-dire  $L = L'$ . Enfin, une suite croissante étant majorée par sa limite, on a pour tout naturel  $n$ ,  $u_n \leq L$  et de même  $L \leq v_n$ . ■

**Exemples:**

1. Les suites  $u$  et  $v$  définies par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

et on notera  $e$  leur limite commune.

2. Les suites  $u$  et  $v$  définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

et on notera  $\gamma$  leur limite commune.

3. Les suites  $u$  et  $v$  définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

4. Les suites  $u$  et  $v$  définies par

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$

5. Les suites  $u$  et  $v$  définies pour  $x > 0$  par

$$u_n = \frac{n(\sqrt[n]{x} - 1)}{\sqrt[n]{x}} \quad \text{et} \quad v_n = n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

*Démonstration.* 1. Rappelons l'inégalité de *Bernoulli*: Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq -1$ ,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &\geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} \quad \text{car} \quad \frac{-1}{(n+1)^2} \geq -1 \\ &\geq \frac{n^2+2n+1-n}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &\geq \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &\geq 1 \end{aligned}$$

Donc  $u$  est croissante.

$$\begin{aligned}
 \frac{v_n}{v_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\
 &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
 &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
 &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
 &\geq \frac{n^2 + 2n + n + 1}{n(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
 &\geq \frac{n^3 + n^2 + 3n^2 + 3n + n + 1}{n^3 + 2n^2 + 2n^2 + 4n} \\
 &\geq 1 + \frac{1}{n(n+2)^2} \\
 \frac{v_n}{v_{n+1}} &\geq 1
 \end{aligned}$$

Donc  $v$  est décroissante.

$$v_n - u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{u_n}{n} \geq 0,$$

donc  $v_n \geq u_n$  or  $v$  décroît, par conséquent:  $v_n \leq v_1$  donc  $u_n \leq v_1$ . Ainsi,  $0 \leq u_n - v_n = \frac{u_n}{n} \leq \frac{v_1}{n} \rightarrow 0$ .

2. Rappelons ici que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln x \leq x - 1$ .

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\
 &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
 u_{n+1} - u_n &\geq \frac{1}{n+1} - \frac{n+2}{n+1} + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $u$  est croissante.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) \\
 &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
 v_{n+1} - v_n &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $v$  est décroissante. De plus,  $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ .

3. Il est clair que  $u$  est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \\ v_{n+1} - v_n &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc  $v$  est décroissante. De plus,  $u_n - v_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

4.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + n + 1 + 2n^2 + 2n + 2n + 2 - 4n^2 - 2n - 4n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\ u_{n+1} - u_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc  $u$  est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n^2 + 2n^2 + n - 4n^2 - 2n}{2n^2(2n+1)} \\ &= \frac{-1}{2n(2n+1)} \\ v_{n+1} - v_n &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc  $v$  est décroissante. De plus,  $v_n - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ . ■

### Corollaire 0.2.3.

*Théorème des segments emboîtés*

Si  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de segments telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n \leq a_{n+1}$  et  $b_{n+1} \leq b_n$  et telle que  $\lim(b_n - a_n) = 0$ , il existe un réel  $x$  tel que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Comme exemple d'application, démontrons la

**Proposition 0.2.4.**

L'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une bijection  $f$  de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{R}$ . Nous définissons alors une suite d'intervalles emboîtés selon un principe de trichotomie par les relations suivantes:

$[a_0, b_0] = [f(0) + 1, f(0) + 2]$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  est celui des trois intervalles

$$\left[ a_n, a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n) \right], \quad \left[ a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n), a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n) \right], \quad \left[ a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n), b_n \right]$$

qui se situe le plus "à gauche" qui ne contient pas  $f(n+1)$ . Soit alors  $x$  l'unique nombre réel commun à tous ces intervalles. Puisque  $f$  est bijective, il existe un entier naturel  $k$  tel que  $x = f(k)$ . Mais par construction  $f(k)$  n'appartient pas à  $[a_k, b_k]$  d'où la contradiction. ■

Comme autre exemple application on pourra donner une deuxième démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass:

*Démonstration.* Si  $u$  est une suite bornée, on définit par récurrence, selon un schéma de dichotomie, une suite d'intervalles emboîtés  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout naturel  $n$ , il existe une infinité d'indices  $i$  vérifiant:  $u_i \in [a_n, b_n]$ . Puis on définit une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  par les relations:  $\varphi(0) = 0$  et pour tout naturel non nul  $k$ ,

$$\varphi(k) = \min \{ i \mid i \in \mathbb{N}, i > \varphi(k-1), u_i \in [a_k, b_k] \}.$$

Il est clair que  $\varphi$  est strictement croissante et que  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'unique point commun à tous les intervalles  $[a_n, b_n]$ . ■

Ou encore,

**Proposition 0.2.5.**

Soit  $f$  une fonction numérique définie et continue sur un intervalle  $[a, b]$  et telle que  $f(a)f(b) < 0$ . Alors,  $f$  admet au moins un zéro.

De plus, si  $f$  est strictement monotone sur  $[a, b]$ , alors  $f$  admet un seul zéro sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* On construit par un procédé de dichotomie une suite d'intervalles emboîtés définie par:  $[a_0, b_0] = [a, b]$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{cases} [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[ a_n, \frac{b_n - a_n}{2} \right] & \text{si } f(a_n) \cdot f\left(\frac{b_n}{2}\right) < 0 \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[ \frac{b_n - a_n}{2}, b_n \right] & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les deux suites adjacentes  $(a_n)$  et  $(b_n)$  vont permettre d'approximer un zéro de la fonction (en effet, pour tout naturel  $n$ ,  $f(a_n)f(b_n) < 0$ ; en passant à la limite on obtient  $(f(l))^2 \leq 0$  d'où  $f(l) = 0$ ). ■

## 0.3 Approximation d'un nombre réel.

### 0.3.1 Approximations rationnelles du nombre $e$ .

Soit  $u$  la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . Cette suite est convergente de limite  $l \leq 3$ .  
*Démonstration.* Il est clair que cette suite est croissante, on vérifie par récurrence que pour tout  $n \geq 1$  on a  $n! \geq 2^{n-1}$ , d'où

$$u_n \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3.$$

■

Soit maintenant  $v$  la suite de terme général  $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ . Alors  $u$  et  $v$  sont adjacentes et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n < l < v_n.$$

Ce nombre  $l$  est en fait le nombre  $e$ , base du logarithme népérien.

*Démonstration.* On a déjà vu que  $u$  est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

donc  $v$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v - u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nn!} = 0$ . ■

D'un point de vue numérique, notre premier critère de convergence utilisé sur  $u$  nous donne l'information que pour tout naturel  $n$ ,  $u_n < l \leq 3$ , on sait seulement que l'erreur  $l - u_n$  est majorée par  $3 - u_n$ , ce qui oblige à calculer  $u_n$  (ce qui entraîne une certaine incertitude liée au moyen de calcul). Par contre, la suite  $v$  permet de contrôler l'erreur commise, par exemple, si l'on veut que l'erreur soit inférieure à  $10^{-3}$ , il suffira de choisir  $n$  tel que  $\frac{1}{nn!} \leq 10^{-3}$ , soit  $n \geq 6$ , ce qui fournit  $2,718 < l < 2,719$ .

### 0.3.2 Approximation de $\pi$ par la méthode des isopérimètres.

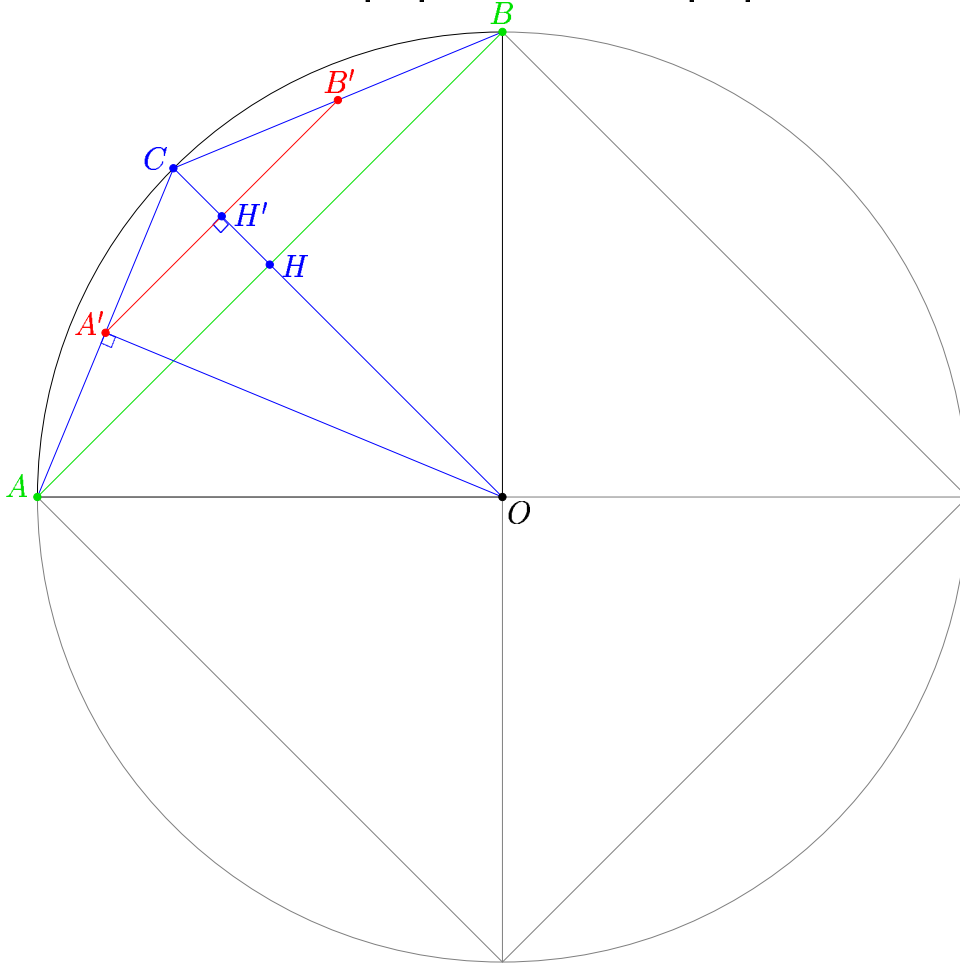
La méthode provient de la constatation suivante:

Soit  $P_n$  un polygone régulier convexe ayant  $2^n$  ( $n \geq 2$ ) côtés, dont le périmètre soit égal à 2. Si  $r_n$  et  $R_n$  sont les rayons respectifs des cercles inscrit et circonscrit à  $P_n$ , alors:  $2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n$ , et donc

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n}.$$

Voici une construction qui va permettre de construire  $P_{n+1}$  à partir de  $P_n$ :

Notons  $[AB]$  un côté de  $P_n$ ,  $C$  le milieu du petit arc de cercle correspondant sur le cercle circonscrit à  $P_n$ ,  $A'$  sera le milieu de  $[AC]$  et  $B'$  le milieu de  $[BC]$ .



D'après le théorème des milieux,  $A'B' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2^n}$ , ce qui est la longueur d'un côté de  $P_{n+1}$ . On a donc  $R_{n+1} = OA'$  et  $r_{n+1} = OH'$ . Quelques considérations géométriques nous permettent alors de trouver les deux suites

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 = \frac{1}{4} \\ r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \end{array} \right. \text{ pour } n \geq 2 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1}R_n} \end{array} \right. \text{ pour } n \geq 2$$

dont on peut prouver qu'elles sont adjacentes et approximent  $\frac{1}{\pi}$  avec une erreur inférieure à  $(\frac{1}{4})^{n-2} (R_2 - r_2)$  à la  $n^{\text{ième}}$  étape.

*Démonstration.* D'après le théorème de Thalès, on a immédiatement que  $H'$  est le milieu de  $[HC]$ , ainsi  $OH' = R_n - \frac{1}{2}HC$ , mais  $HC = R_n - r_n$  donc

$$OH' = R_n - \frac{1}{2}R_n + \frac{1}{2}r_n = \frac{R_n + r_n}{2}.$$

Montrons maintenant que  $R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1}R_n}$ , c'est-à-dire  $OA'^2 = OH' \cdot OC$ .

On constate tout d'abord que  $\widehat{A'H'O}$  et  $\widehat{AA'O}$  sont des angles droits: Du fait que  $C$  soit le milieu de l'arc  $AB$ ,  $AC = CB$ , or  $OA = OB$  donc les triangles  $OAC$  et  $OCB$  sont semblables et donc  $(OC)$  est axe de symétrie de la figure. Ainsi,  $\widehat{AHO}$  est droit, or d'après le théorème



des milieux  $[A'B']$  est parallèle à  $(AB)$  d'où  $\widehat{A'H'O}$  est droit.  $(A'O)$  est la médiane du triangle isocèle  $AOC$ ; c'est donc aussi sa médiatrice et par conséquent  $\widehat{AA'O}$  est droit.

Le théorème de pythagore appliqué dans les triangles rectangle  $OA'A$ ,  $OH'A'$  et  $A'H'C$  donne successivement;  $OA'^2 = OC^2 - A'C^2$ ,  $OA'^2 = A'H'^2 + OH'^2$  et  $A'H'^2 = A'C^2 - CH'^2$ , ainsi en sommant les deux premières égalités, on obtient:

$$2 OA'^2 = OC^2 - CH'^2 + OH'^2.$$

Or,  $CH' = OC - OH'$  donc

$$\begin{aligned} 2 OA'^2 &= OC^2 - (OC - OH')^2 + OH'^2 \\ &= OC^2 - OC^2 + 2OC \cdot OH' - OH'^2 + OH'^2 \\ &= 2OC \cdot OH'. \end{aligned}$$

D'où les suites proposées.

Pour  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= \frac{r_n + R_n}{2} - r_n \\ &= \frac{R_n - r_n}{2} > 0 \quad \text{car } R_n > r_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= \sqrt{r_{n+1}R_n} - R_n \\ &= \frac{r_{n+1}R_n - R_n^2}{\sqrt{r_{n+1}R_n} + R_n} \\ &= \frac{\frac{r_n + R_n}{2} R_n - R_n^2}{\sqrt{r_{n+1}R_n} + R_n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_n(r_n - R_n)}{\sqrt{r_{n+1}R_n} + R_n} < 0 \quad \text{car } R_n > r_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{n+1} - r_{n+1} &= \sqrt{r_{n+1}R_n} - \frac{r_n + R_n}{2} \\ &= \sqrt{\frac{r_n R_n + R_n^2}{2}} - \frac{r_n + R_n}{2} \\ &= \frac{\frac{r_n R_n + R_n^2}{2} - \frac{r_n^2 + 2r_n R_n + R_n^2}{4}}{R_{n+1} + r_{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{R_n^2 - r_n^2}{R_{n+1} + r_{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (R_n - r_n) \cdot \underbrace{\frac{R_n + r_n}{R_{n+1} + r_{n+1}}}_{= \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} \leq 1} \\ &\quad \text{car } (r_n) \text{ est croissante} \\ R_{n+1} - r_{n+1} &\leq \frac{1}{4} \cdot (R_n - R_n) \end{aligned}$$

et une récurrence immédiate nous donne:

$$0 \leq R_n - r_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} (R_2 - r_2)$$

donc  $(R_n)$  et  $(r_n)$  sont bien adjacentes. ■

### 0.3.3 Approximation d'un point fixe d'une application monotone contractante.

Soit  $f$  une application contractante d'un intervalle  $[a, b]$  dans lui-même, alors elle admet un unique point fixe  $L$  dans  $[a, b]$ . Supposons de plus  $f$  monotone et soit  $\alpha \in [a, b]$  et  $u$  la suite définie par les conditions:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Alors,

- (i) si  $f$  est croissante,  $u$  est monotone, convergente vers  $L$ ,
- (ii) si  $f$  est décroissante, les suites  $v$  et  $w$  définies par  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$  sont adjacentes et convergent vers  $L$ .

### 0.3.4 Développement décimal d'un nombre réel.

#### Théorème 0.3.1.

Soit  $x$  un nombre réel. Il existe une seule suite  $(w_n)$  vérifiant:

1.  $w_0 \in \mathbb{Z}$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \in [0, 9]$
3. Il existe une infinité d'indices  $i$  tel que  $w_i \neq 9$
- 4.

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{w_k}{10^k}.$$

Cette suite est appelée le développement décimal illimité de  $x$ .

*Démonstration.* Si une telle suite existe, les quatres conditions nous donne alors que

$$\begin{cases} w_0 = [x] \\ w_n = [10^n x] - 10 [10^{n-1} x], \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

ce qui prouve son unicité sous réserve d'existence. Il reste donc à vérifier que la suite  $(w_n)$  ainsi définie vérifie bien les conditions 1., 2., 3., 4..

- La condition 1. est immédiate.

- La condition 2. s'obtient à partir de l'encadrement

$$[10^{n-1}x] \leq 10^{n-1}x < [10^{n-1}x] + 1$$

d'où

$$10 [10^{n-1}x] \leq [10^n x] < 10 [10^{n-1}x] + 10$$

c'est-à-dire

$$10 [10^{n-1}x] \leq [10^n x] \leq 10 [10^{n-1}x] + 9.$$

- Pour la condition 4., on pose pour tout entier naturel  $n$ ,

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{10^k}$$

et on vérifie par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$  et que  $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$  et en se rapportant à la démonstration du théorème du second paragraphe, on a que les suites de terme général  $x_n$  et  $x_n + \frac{1}{10^n}$  sont adjacentes, de limite  $x$ .

- Si à partir d'un certain rang  $p$ , tous les termes de la suite  $(w_n)$  étaient égaux à 9, on aurait

$$x - x_p = \sum_{k \geq p+1} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^p}$$

ce qui est en contradiction avec  $x < x_p + \frac{1}{10^p}$ . ■

### Proposition 0.3.2.

Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal illimité est périodique.

*Démonstration.* L'idée de la démonstration: En utilisant les notations du paragraphe 2; chaque numérateur  $p_n$  des fractions décimales  $u_n$  s'obtient en divisant  $a \times 10^n$  par  $b$ . Le numérateur suivant  $p_{n+1}$  s'obtiendra à partir de la division précédente en plaçant un zéro à droite du reste partiel précédent, or tous les restes sont inférieurs au diviseur  $b$ . Ainsi après  $b$  divisions au plus, on retrouvera un reste déjà trouvé donc le même chiffre au quotient.

Soit  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ,  $p_n$  s'obtient comme quotient de la division euclidienne de  $a \cdot 10^n$  par  $b$ ; notons  $r_n$  le reste de cette division:

$$a \cdot 10^n = p_n \cdot b + r_n \quad \text{avec } r_n < b.$$

On a:

$$p_n = \left[ 10^n \frac{a}{b} \right] \quad \text{et} \quad p_{n+1} = \left[ 10^{n+1} \frac{a}{b} \right].$$

$$\begin{aligned} a \cdot 10^{n+1} &= p_{n+1}b + r_{n+1} \\ &= 10b \cdot p_n + 10r_n \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$10r_n = (p_{n+1} - 10p_n)b + r_{n+1},$$

donc  $r_{n+1}$  est le reste de la division euclidienne de  $10r_n$  par  $b$ . Or  $(r_n)$  ne prend qu'un nombre fini de valeur puisque majoré par  $b$ , donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $r_n = r_{k+n}$  pour tout  $n$  (on

peut supposer qu'il n'y a pas de partie non périodique en multipliant  $x$  par une puissance de 10 suffisamment grande).

Montrons que  $w_{n+1} = w_{k+1}$ : On a

$$a \cdot 10^n = p_n b + r_n,$$

$$a \cdot 10^{n+1} = p_{n+1} b + r_{n+1},$$

$$a \cdot 10^k = p_k b + r_n$$

et

$$a \cdot 10^{k+1} = p_{k+1} b + r_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= p_{n+1} - 10p_n \\ &= \frac{a \cdot 10^{n+1} - r_{n+1} - a \cdot 10^{n+1} + 10 \cdot r_n}{b} \\ &= \frac{10 \cdot r_n - r_{n+1}}{b} \\ &= \frac{a \cdot 10^{k+1} - 10 \cdot b p_k - a \cdot 10^{k+1} + b p_{k+1}}{b} \\ &= p_{k+1} - 10 \cdot p_k \\ w_{n+1} &= w_{k+1}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $x = w_0, w_1 w_2 \dots w_k w_{k+1} w_{k+2} \dots w_{k+n} w_{k+1} w_{k+2} \dots w_{k+n} \dots$  alors

$$\begin{aligned} x &= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^{k+n}} + \frac{B}{10^{k+2n}} + \dots \\ &= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^k} \cdot \sum_{i \geq 1} \left( \frac{1}{10^n} \right)^i \\ &= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^k} \cdot \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} \\ x &= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^k} \cdot \frac{1}{10^n - 1} \end{aligned}$$

■