Nombres décimaux. Applications.

But: $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut approcher tout nombre réel par une suite de rationnels, mais il est difficile de comparer deux rationnels:

$$\frac{51}{86} \quad \text{et} \quad \frac{3}{5},$$

et il est encore plus difficile d'apprécier la qualité d'un encadrement entre deux nombres rationnels:

$$\frac{51}{86} \leq x \leq \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{51}{86} = \frac{86 \times 3 - 51 \times 5}{5 \times 86} = \frac{3}{430}.$$

Nous allons donner dans cet exposé un autre ensemble de nombres dense dans $\mathbb{R}$ qui supprime cette difficulté.

Point de vue: $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné vérifiant l'axiome de la borne supérieure (en particulier $\mathbb{R}$ est archimédien et on peut définir la fonction partie entière d'un nombre x notée $[x]$).

Pré-requis:

- ◇ L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné (on utilisera dans cet exposé la notation habituelle $\frac{a}{b}$ lorsqu'il s'agira d'un nombre rationnel).
- ◇ Définition de nombres premiers entre eux (on sous-entend ici que l'on connait la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier).
- ◇ notion de division euclidienne.
- ◇ Notion de suites adjacentes.

0.1 Définition et premières propriétés.

✎ **Définition 0.1.1.**
On dit qu'un nombre réel d est un nombre décimal si et seulement si il existe un entier naturel n et un entier relatif a tels que:

$$d = \frac{a}{10^n}.$$

Notation: On notera $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Remarque: $\mathbb{D}$ est clairement un sous ensemble de $\mathbb{Q}$ qui répond à nos attentes car pour n fixé, il est très facile de classer ces nombres. Il reste donc à vérifier que cet ensemble est bien dense dans $\mathbb{R}$.

Mais avant cela, donnons une propriété remarquable de $\mathbb{D}$:

Proposition 0.1.2.
Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel que $(a, b) = 1$ alors $x \in \mathbb{D}$ si et seulement si 2 et 5 sont les seuls facteurs premier du dénominateur b.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{10^n} \quad \text{alors} \quad a \cdot 10^n = P \cdot b.$$

Or $(a, b) = 1$, donc b divise 10^n ($b \leq 10^n$ car $\frac{a}{b}$ est irréductible). En conclusion b ne contient que les facteurs premiers contenus dans 10^n, c'est-à-dire 2 et 5.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $b = 2^n \times 5^{n'}$, montrons que la fraction $\frac{a}{b}$ est équivalente à une fraction décimale.

- Si $n = n'$, on a $\frac{a}{b} = \frac{a}{10^n}$.
- Si $n > n'$, multiplions les deux termes de la fraction $\frac{a}{2^n \times 5^{n'}}$ par $5^{n-n'}$, on obtient

$$\frac{a}{2^n \times 5^{n'}} = \frac{a \times 5^{n-n'}}{2^n \times 5^n} = \frac{a \times 5^{n-n'}}{10^n}$$

  qui est une fraction décimale.
- Si $n < n'$, multiplions les deux termes de la fraction $\frac{a}{2^n \times 5^{n'}}$ par $2^{n'-n}$, on obtient $\frac{a \times 2^{n'-n}}{10^{n'}}$ qui est une fraction décimale.

■

Exercice: Démontrer que pour tout entier n la fraction

$$\frac{n^2 + 1}{n\,(n^2 - 1)}$$

n'est jamais décimale.

Démonstration. Pour tout n, $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)} = \frac{n^2+1}{n(n+1)(n-1)}$, or $3|((n-1)n(n+1))$ alors si $3 \nmid n^2 + 1$ lorsque l'on simplifiera la fraction il restera toujours un 3 au dénominateur et par conséquent cette fraction ne sera jamais décimale.

Montrons que $3 \nmid n^2 + 1$:

- Si $n \equiv 0[3]$, $n^2 + 1 \equiv 1[3]$
- Si $n \equiv 1[3]$, $n^2 + 1 \equiv 2[3]$
- Si $n \equiv 2[3]$, $n^2 + 1 \equiv 2[3]$

■

Puisque la somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal et que le produit de deux nombres décimaux est un décimal, on a:

Proposition 0.1.3.
$\mathbb{D}$ a une structure d'anneau commutatif totalement ordonné (pour l'addition, la multiplication et l'ordre induit par $\mathbb{R}$).

Remarque: Le quotient de nombres décimaux n'est pas nécessairement un nombre décimal

$$\frac{2}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$$

donc $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ n'a pas une structure de corps.

Proposition 0.1.4.
$\mathbb{D}$ est un anneau principal.

Rappels:

– Un anneau est principal si il s'agit d'un anneau intègre commutatif dont tous les idéaux sont principaux.
– Un idéal I de l'anneau commutatif A est principal s'il est engendré par un seul élément.
– Un idéal de A est un sous-groupe I de A tel que

$$\forall a \in A, \forall x \in I, \, a \cdot x \in I.$$

Démonstration. $\mathbb{D}$ est clairement intègre.

Soit I un idéal non nul de $\mathbb{D}$ (un idéal nul est évidemment principal).

Montrons qu'il existe a dans I tel que $I = a\mathbb{D}$:

Soit $x \in I$, alors on peut écrire $x = 2^{-\alpha}5^{-\beta}p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ premier avec 10 et α, $\beta \in \mathbb{N}$. Ainsi, $p = 2^{\alpha}5^{\beta}x$ est un élément de I, car $2^{\alpha}5^{\beta}$ appartient à $\mathbb{D}$. Donc $|p|$ appartient à $\mathbb{N}^* \cap I$, cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, qui possède donc un plus petit élément a et on a clairement $a\mathbb{D} \subset I$.

On effectue la division euclidienne de p par a:

$$p = aq + r \quad 0 \leq r < a,$$

comme a et p sont deux éléments de I, on a $r = p - aq \in I \cap \mathbb{N}^*$ or, par définition, a est le plus petit élément de $I \cap \mathbb{N}^*$ donc, $r = 0$ et $p = aq$. On en déduit que $x = a\left(q2^{-\alpha}5^{-\beta}\right)$ et par conséquent $I \subset a\mathbb{D}$. En conclusion, $I = a\mathbb{D}$. ■

Remarque: Nous voici en présence de nombres beaucoup plus facile à comparer que les rationnels car si on a $\frac{a}{10^n} \in \mathbb{D}$ et $\frac{a'}{10^n} \in \mathbb{D}$ pour n fixé il nous suffit de comparer deux entiers, la présentation avec l'écriture à virgule permet de rendre compte de ce phénomène:

Soit $\frac{a}{10^n} \in \mathbb{D}_+$ avec $a = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$ (écriture en base 10), ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{a}{10^n} &= \sum_{k=0}^{p} a_k 10^{k-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{k-n} + \sum_{k=n}^{p} a_k 10^{k-n} \\
\frac{a}{10^n} &= a_p a_{p-1} \dots a_n, a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0
\end{aligned}$$

0.2 Approximation décimale d'un nombre.

✎ **Théorème 0.2.1.**
Soit x un réel positif et n un entier naturel, alors il existe un unique nombre naturel p_n tel que
$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, quels que soient les réels x et α, il existe un unique entier relatif p tel que:
$$p\alpha \leq x < (p+1)\alpha.$$
Si on prend $\alpha = \frac{1}{10^n}$ on en déduit qu'il existe un unique $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n} \qquad (p_n = [10^n x]).$$
■

✎ **Proposition 0.2.2.**
$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Nous allons utiliser la double inégalité précédente; montrons que les suite $\left(\frac{p_n}{10^n}\right)$ et $\left(\frac{p_n+1}{10^n}\right)$ sont adjacentes:

- Montrons que $\left(\frac{p_n}{10^n}\right)$ est une suite croissante:
$$p_n \leq 10^n \times x < p_n + 1$$
et
$$p_{n+1} \leq 10^{n+1} \times x < p_{n+1} + 1,$$
en multipliant la première relation par 10, on a:
$$10 \times p_n \leq 10^{n+1} \times x < 10\,(p_n + 1)$$
or
$$10^{n+1} \times x < p_{n+1} + 1$$
il s'ensuit que
$$10 \times p_n \leq 10^{n+1} \times x < p_{n+1} + 1$$
et puisqu'il s'agit de nombres entiers, $10p_n + 1 \leq p_{n+1} + 1$ donc
$$\frac{p_n}{10^n} \leq \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}.$$
- Montrons que $\left(\frac{p_n+1}{10^n}\right)$ est une suite décroissante:
$$p_n \leq 10^n \times x < p_n + 1,$$
$$10 \times p_n \leq 10^{n+1} \times x < 10\,(p_n + 1)$$
et
$$p_{n+1} \leq 10^{n+1} \times x < p_{n+1} + 1,$$
d'où
$$p_{n+1} \leq x \times 10^{n+1} < 10(p_n + 1)$$

c'est-à-dire

$$p_{n+1} < 10(p_n + 1),$$

puisqu'il s'agit de nombres entiers $p_{n+1} + 1 \leq 10\left(p_n + 1\right)$, donc

$$\frac{p_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \leq \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

- La différence $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

■

Définition 0.2.3.
$\frac{p_n}{10^n}$ (respectivement $\frac{p_n+1}{10^n}$) est appelée la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut (respectivement par excès) de x.

Corollaire 0.2.4.
$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. En reprenant le théorème précédent, on a

$$\frac{p_n}{10^n} \leq \frac{a}{b} < \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

Cette double inégalité s'écrit:

$$b \cdot p_n \leq a \times 10^n < b\left(p_n + 1\right).$$

Cette double inégalité exprime que p_n est le quotient entier de la division euclidienne de $a \times 10^n$ par b, d'où l'existence et l'unicité et les mêmes considérations que dans la démonstration du théorème nous donne l'adjacence des suites de terme général $\frac{p_n}{10^n}$ et $\frac{p_n+1}{10^n}$. ■

Exercice: Donner un encadrement à 10^{-5} près de $\frac{355}{113}$.

Remarque: Cette fraction est le cinquième développement en fraction continue de π: On note $\langle\cdot\rangle$ la partie fractionnaire.

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + \langle\pi\rangle \\
&= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\langle\pi\rangle}} \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + 0,0625\ldots} \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0,9965\ldots}} \\
\pi &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0,00341\cdots}}}
\end{aligned}$$

et

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=\frac{355}{113}.$$

Exemple: Approximation de $\sqrt{n}$ avec n un entier natrurel:

On écrit $\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n\cdot 10^{2k}}}{10^k}$ et on cherche un naturel a tel que $a^2 \leq n\cdot 10^{2k} < (a+1)^2$, on obtient alors une approximation à 10^{-k} près de $\sqrt{n}$ (le plus simple pour y parvenir est de le faire pour tous les k de 0 jusqu'à la précision souhaitée, ainsi à chaque étape on n'a que dix nombres à tester et moins encore si l'on procède par dichotomie).

Exercices: Construire un programme informatique donnant un encadrement de $\sqrt{n}$ à 10^{-k} près et à l'aide de celui-ci;

1. donner une approximation à 10^{-8} près de $\sqrt{2}$.
2. donner une approximation à 10^{-5} près de

$$\sqrt{\sqrt{102-\frac{2222}{22^2}}}.$$

Démonstration. On va procéder par dichotomie:

$\mathrm{rcarre}(n,k)$	$\leftarrow$	C'est un programme demandant deux valeurs n et k
$\mathrm{Local}\, x,y$	$\leftarrow$	On introduit deux variables x et y internes au programme
$0\to x$	$\leftarrow$	
$n*10\hat{\ }k\to y$	$\leftarrow$	On leur affecte deux valeurs initiales $(*)$
Loop	$\leftarrow$	On débute une boucle
$\mathrm{If}((x+y)/2)\hat{\ }2>10\hat{\ }(2*k)$	$\leftarrow$	Si $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2>n10^{2k}$
Then		alors
$\mathrm{int}((x+y)/2)\to y$	$\leftarrow$	on donne la valeur $\left[\frac{x+y}{2}\right]$ à y
Else		sinon
$\mathrm{int}((x+y)/2)\to x$	$\leftarrow$	on donne la valeur $\left[\frac{x+y}{2}\right]$ à x
EndIf		
$\mathrm{If}\, y-x=1$	$\leftarrow$	Si $y-x=1$
Exit	$\leftarrow$	on sort de la boucle
EndLoop	$\leftarrow$	sinon on recommence la boucle
$\mathrm{Return}\, x$	$\leftarrow$	
$\mathrm{Return}\, y$	$\leftarrow$	on affiche les valeurs de x et y

$(*)$ Le nombre a cherché est bien plus petit que $n10^k$ car $a\leq\sqrt{n}10^k\leq n10^k$.

1. A l'aide de ce programme, on obtient que

$$\frac{141421355}{10^8}\leq\sqrt{2}\leq\frac{141421356}{10^8}.$$

2. On a

$$\sqrt{\sqrt{102 - \frac{2222}{22^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{47146}}{22}},$$

on obtient grâce au programme;

$$\frac{2171312966846}{10^{10}} \leq \sqrt{47146} \leq \frac{2171312966847}{10^{10}}$$

or en effectuant la division euclidienne on a

$$98696043947 \leq \frac{2171312966846}{22} \leq 98696043948$$

et

$$98696043947 \leq \frac{2171312966847}{22} \leq 98696043948.$$

Le programme nous donne alors

$$314159 \leq \sqrt{98696043947} \leq 314160$$

et

$$314159 \leq \sqrt{98696043948} \leq 314160$$

donc

$$\frac{314159}{10^5} \leq \sqrt{\sqrt{102 - \frac{2222}{22^2}}} \leq \frac{314160}{10^5}.$$

■

Transition: En conséquence directe de cette approximation on peut définir le développement décimal d'un nombre réel.

✎ Théorème 0.2.5.

Soit x un nombre réel. Il existe une seule suite (w_n) vérifiant:

1. $w_0 \in \mathbb{Z}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in [\![0, 9]\!]$
3. Il existe une infinité d'indices i tels que $w_i \neq 9$
4. $$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{w_k}{10^k}.$$

Cette suite est appelée le développement décimal illimité de x.

Démonstration. Si une telle suite existe, alors

$$x = w_0 + \frac{w_1}{10} + \frac{w_2}{10^2} + \ldots + \frac{w_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{w_n}{10^n} + \frac{w_{n+1}}{10^{n+1}} + \ldots,$$

ainsi $w_0 = [x]$ et on a

$$10^n x = \underbrace{10^n[x] + w_1 10^{n-1} + w_2 10^{n-2} + \ldots + w_{n-1}10 + w_n}_{:=A_n} + \frac{w_{n+1}}{10} + \ldots.$$

Montrons que $A_n = [10^n x]$: Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leq 9$ on a:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N} \frac{w_k}{10^{k-n}} &\leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{9}{10^{k-n}} \\ &= 10^n \cdot 9 \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{9}{10} \frac{1-\frac{1}{10^{N+1}}}{1-\frac{1}{10}}\end{aligned}$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{10^{N+1}}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{w_k}{10^{k-n}} \leq 1.$$

De plus, l'inégalité est stricte car l'hypothèse 3. impose, pour tout naturel n, l'existence de $w_i \neq 9$ tel que $i \geq n$. On a de même

$$10^{n-1}x = \underbrace{10^{n-1}[x] + w_1 10^{n-2} + w_2 10^{n-3} + \ldots + w_{n-1}}_{=[10^{n-1}x]} + \frac{w_n}{10} + \frac{w_{n+1}}{10^2} + \ldots$$

d'où

$$\begin{cases} w_0 = [x] \\ w_n = [10^n x] - 10\,[10^{n-1}x], \quad \forall n \geq 1 \end{cases},$$

ce qui prouve son unicité sous réserve d'existence. Il reste donc à vérifier que la suite (w_n) ainsi définie vérifie bien les conditions 1., 2., 3., 4..

- La condition 1. est immédiate.
- La condition 2. s'obtient à partir de l'encadrement

  $$\left[10^{n-1}x\right] \leq 10^{n-1}x < \left[10^{n-1}x\right] + 1,$$

  ainsi

  $$10\left[10^{n-1}x\right] \leq 10^n x < 10\left[10^{n-1}x\right] + 10,$$

  or un nombre réel compris entre deux entiers à sa partie entière comprise entre ces deux même entiers, ainsi

  $$10\left[10^{n-1}x\right] \leq [10^n x] < 10\left[10^{n-1}x\right] + 10,$$

  c'est-à-dire

  $$10\left[10^{n-1}x\right] \leq [10^n x] \leq 10\left[10^{n-1}x\right] + 9,$$

  soit encore

  $$0 \leq w_n \leq 9.$$

– Pour la condition 4., on pose pour tout entier naturel n,

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{10^k}.$$

Vérifions par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$.
Pour $n = 0$, $x_0 = w_0 = [x] = \frac{[10^0 x]}{10^0}$.
Pour $n = 1$, $x_1 = [x] + \frac{[10x]-10[x]}{10} = \frac{[10x]}{10}$.
Supposons la relation vraie à un certain rang n fixé et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{10^k} + \frac{w_{n+1}}{10^{n+1}} \\ &= \frac{[10^n x]}{10^n} + \frac{[10^{n+1}x] - 10[10^n x]}{10^{n+1}} \\ x_{n+1} &= \frac{[10^{n+1}x]}{10^{n+1}} \end{aligned}$$

La relation est donc vraie pour tout entier naturel n.
En se rapportant à la démonstration du fait que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ en se rappelant que $p_n = [10^n x]$, on a que les suites de terme général x_n et $x_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes, de limite x.

– Si à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite (w_n) étaient égaux à 9, on aurait

$$x - x_p = \sum_{k \geq p+1} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^p}$$

ce qui est en contradiction avec $x < x_p + \frac{1}{10^p}$.

■

Notation: On ecrira dorénavant $x = w_0, w_1 w_2 \ldots$.

Remarque: C'est avec l'aide de ce développement illimité que Liouville donna le premier nombre transcendant:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Définition 0.2.6.
On dira qu'un développement décimal illimité de x est périodique si et seulement si la suite w_k est périodique à partir d'un certain rang.

Proposition 0.2.7.
Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal illimité est périodique.

Démonstration. L'idée de la démonstration: En utilisant les notations du paragraphe 2; chaque numérateur p_n des fractions décimales u_n s'obtient en divisant $a \times 10^n$ par b. Le numérateur suivant p_{n+1} s'obtiendra à partir de la division précédente en plaçant un zéro à droite du reste partiel précédent, or tous les restes sont inférieurs au diviseur b. Ainsi après b divisions au plus, on retrouvera un reste déjà trouvé donc le même chiffre au quotient.

Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, p_n s'obtient comme quotient de la division euclidienne de $a \cdot 10^n$ par b; notons r_n le reste de cette division:

$$a \cdot 10^n = p_n \cdot b + r_n \qquad \text{avec } r_n < b.$$

On a:

$$p_n = \left[10^n \frac{a}{b}\right] \quad \text{et} \quad p_{n+1} = \left[10^{n+1} \frac{a}{b}\right].$$

$$\begin{aligned} a \cdot 10^{n+1} &= p_{n+1} b + r_{n+1} \\ &= 10b \cdot p_n + 10 r_n \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$10 r_n = (p_{n+1} - 10 p_n)\, b + r_{n+1},$$

donc r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b. Or (r_n) ne prend qu'un nombre fini de valeur puisque majoré par b, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r_n = r_{k+n}$ pour tout n (on peut supposer qu'il n'y a pas de partie non périodique en multipliant x par une puissance de 10 suffisemment grande).

Montrons que $w_{n+1} = w_{k+1}$: On a

$$a \cdot 10^n = p_n b + r_n,$$

$$a \cdot 10^{n+1} = p_{n+1} b + r_{n+1},$$

$$a \cdot 10^k = p_k b + r_n$$

et

$$a \cdot 10^{k+1} = p_{k+1} b + r_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= p_{n+1} - 10 p_n \\ &= \frac{a \cdot 10^{n+1} - r_{n+1} - a \cdot 10^{n+1} + 10 \cdot r_n}{b} \\ &= \frac{10 \cdot r_n - r_{n+1}}{b} \\ &= \frac{a \cdot 10^{k+1} - 10 \cdot b p_k - a \cdot 10^{k+1} + b p_{k+1}}{b} \\ &= p_{k+1} - 10 \cdot p_k \\ w_{n+1} &= w_{k+1}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $x = w_0, w_1w_2 \dots w_kw_{k+1}w_{k+2} \dots w_{k+n}w_{k+1}w_{k+2} \dots w_{k+n} \dots$ alors

$$\begin{aligned}
x &= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^{k+n}} + \frac{B}{10^{k+2n}} + \dots \\
&= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^k} \cdot \sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{10^n} \right)^i \\
&= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^k} \cdot \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} \\
x &= u_0 + \frac{A}{10^k} + \frac{B}{10^k} \cdot \frac{1}{10^n - 1}
\end{aligned}$$

■

0.3 Compléments

Théorème 0.3.1.

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul et a une racine irrationnelle de P. Alors il existe des réels $c > 0$ et $r \geq 0$ tels que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^r}$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Démonstration. On décompose P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et on considère $Q \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible, divisant P et tel que $Q(a) = 0$. On note r le degré de Q. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Comme $a \neq \frac{p}{q}$, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe $d \in \left] \frac{p}{q}, a \right[$ tel que

$$Q\left(\frac{p}{q}\right) = Q\left(\frac{p}{q}\right) - Q(a) = Q'(d)\left(\frac{p}{q} - a\right).$$

En passant à la valeur absolue, on obtient

$$\left| Q\left(\frac{p}{q}\right) \right| = |Q'(d)| \left| a - \frac{p}{q} \right|.$$

Il existe $A \in \mathbb{Z}^*$ tel que $AQ \in \mathbb{Z}[X]$. Il s'ensuit que $Aq^rQ\left(\frac{p}{q}\right)$ est dans $\mathbb{Z}$ et même dans $\mathbb{Z}^*$, puisque Q n'a pas de racine rationnelle. Par conséquent, on a $\left| Aq^rQ\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq 1$ et

$$|Q'(d)| \left| a - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{Aq^r} \left| Aq^rQ\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{Aq^r}.$$

Cherchons à majorer $|Q'(d)|$: Q' étant continue sur le compact $[a-1,a+1]$, il existe $K>0$ tel que, si $x\in[a-1,a+1]$, $|Q'(x)|\leq K$. Ainsi, si $\frac{p}{q}\in[a-1,a+1]$ on a

$$K\left|a-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{Aq^r}\quad\text{et}\quad\left|a-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{c}{q^r}.$$

en ayant posé $c=\frac{1}{KA}>0$. Quitte à changer c en 1, on peut supposer $c\leq 1$. Alors, l'inégalité $\left|a-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{c}{q^r}$ reste vraie même si $\left|a-\frac{p}{q}\right|>1$. ■

Remarque: Ce théorème permit à Liouville de donner les premiers exemples de nombres transcendants, c'est-à-dire non algèbriques (en 1844). Supposons que a soit un réel irrationnel tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $q\geq 2$ tel que $\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^k}$. Alors, il ne peut exister c et r comme dans le théorème; en prenant k assez grand, on arrive à une contradiction puisque $q\geq 2$.

Or

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\geq 0}\frac{1}{10^{k!}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{10^{k!}}\right| &= \sum_{k\geq n}\frac{1}{10^{k!}}\\
&= \sum_{k\geq n}\frac{1}{10^{k\cdot(k-1)!}}\\
&< \frac{1}{10^{(n-1)!}}\cdot\sum_{k\geq n}\frac{1}{10^k}\\
&< \frac{1}{10^{(n-1)!}}\frac{1}{10^n\left(1-\dfrac{1}{10}\right)}\\
&< \frac{10}{9\cdot 10^{(n-1)!}}\cdot\frac{1}{10^n}\\
\left|\sum_{k\geq 0}\frac{1}{10^{k!}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{10^{k!}}\right| &< \frac{1}{10^n}
\end{aligned}$$

En 1863, Cantor, après avoir démontré que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, prouva l'existence d'une infinité de nombres transcendants en remarquant que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.