Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples.

Le titre de la leçon est situé dans le cadre des fonctions numériques de la variable réelle.

Pré-requis: Notion de limite (finie ou infinie) d'une fonction numérique de la variable réelle en un point a de $\mathbb{R}$.

Nous noterons $\overline{\mathbb{R}}$ la droite numérique achevée.

0.1 Limite à l'infini.

Dans ce qui suit, nous ne developpons que la notion de limite en $+\infty$, étant entendu que celle de limite en $-\infty$ se traite de manière analogue.

Nous supposons dans ce paragraphe que f est une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$.

Définition 0.1.1.

On dit que f admet une limite finie L en $+\infty$ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On dit que f admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en $+\infty$ si, et seulement si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in D \text{ et } x > A \Rightarrow f(x) > B \text{ (respectivement } f(x) < B).$$

Proposition 0.1.2.

Soit f définie sur un intervalle contenant $]a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
La fonction f admet L pour limite en $+\infty$ si, et seulement si la fonction g définie sur $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet L pour limite en 0.

Démonstration. Si L est finie, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $0 < x < \alpha$ impliquent $|g(x) - L| < \varepsilon$. Or $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, en posant $X = \frac{1}{x}$ et $A = \frac{1}{\alpha}$ on obtient $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \in D$ et $x > A$ impliquent $|f(X) - L| < \varepsilon$.

On fait de même pour L infinie. ∎

Remarques:

- Cette proposition nous permet d'obtenir l'unicité de la limite L, ainsi lorsque f admet $L \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en $+\infty$, on notera:

$$\lim_{+\infty} f = L.$$

- Cette proposition nous permet aussi d'obtenir:

Proposition 0.1.3.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur D et λ un nombre réel.

- Pour L et L des réels, si
$$\lim_{+\infty} f = L \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} g = L' \quad \Rightarrow \quad \lim_{+\infty}(f+g) = L + L'.$$
- Si
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{et } g \text{ minorée au voisinage de l'infini,}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{+\infty}(f+g) = +\infty.$$
- Si
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \quad \text{et } g \text{ majorée au voisinage de l'infini,}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{+\infty}(f+g) = -\infty.$$
- Pour $L \in \mathbb{R}$, si
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{+\infty} \lambda f = \lambda L.$$
- Si
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda > 0 \text{ (respectivement } <0)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{+\infty} \lambda f = +\infty \text{ (respectivement } -\infty).$$
- Si
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \quad \text{et} \quad \lambda > 0 \text{ (respectivement } <0)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{+\infty} \lambda f = -\infty \text{ (respectivement } +\infty).$$
- Pour L et L' deux réels, si
$$\lim_{+\infty} f = L \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} g = L' \quad \Rightarrow \quad \lim_{+\infty} fg = LL'.$$
- Si
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \text{(respectivement } -\infty)$$
et g minorée au voisinage de l'infini par un réel strictement positif,
$$\Rightarrow \quad \lim_{+\infty} fg = +\infty \text{ (respectivement } -\infty).$$
- Si
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \text{(respectivement } -\infty)$$
et g majorée au voisinage de l'infini par un réel strictement négatif,
$$\Rightarrow \quad \lim_{+\infty} fg = -\infty \text{ (respectivement } +\infty).$$

Remarques: Si $\lim_{+\infty} f = L$ avec $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et si f ne s'annule pas sur D, alors $\lim_{+\infty} \frac{1}{f} = \frac{1}{L}$ (en convenant que $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

Si $\lim_{+\infty} f = 0$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, (respectivement $\mathbb{R}_-^*$), alors $\lim_{+\infty} \frac{1}{f} = +\infty$ (respectivement $-\infty$).

0.2 Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction.

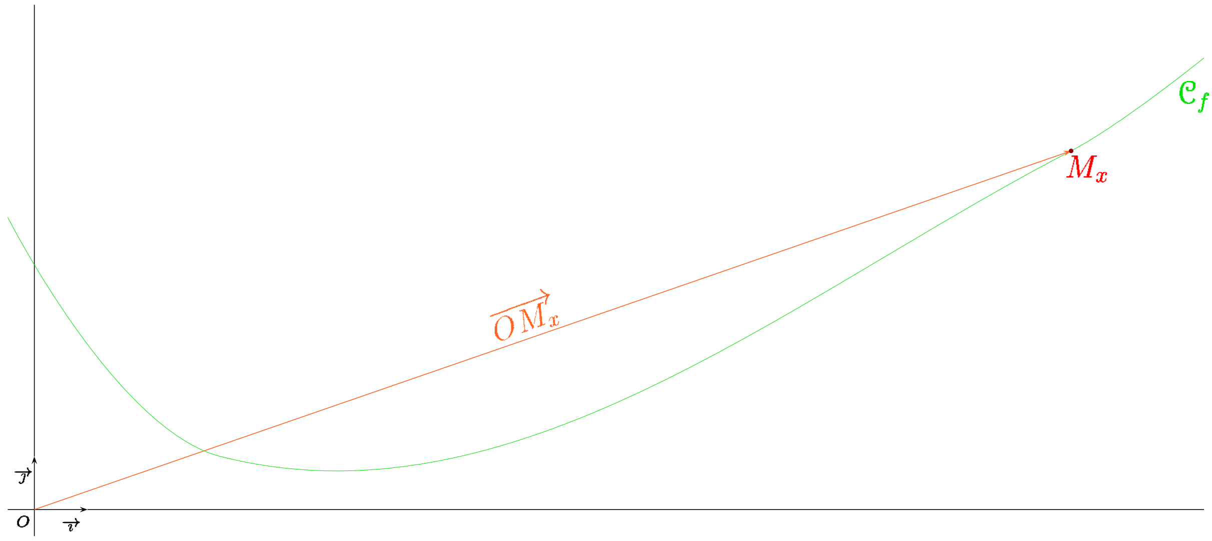
Dans ce qui suit, nous supposons f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$ (le fait de choisir le repère orthonormé permet de calculer facilement la distance de deux points du plan par la formule habituelle portant sur les coordonnées de ces points: on pourrait s'affranchir de l'hypothèse orthonormé mais l'exposé s'en trouverait alourdi à certains endroits).

Notations: Pour tout x dans I, nous noterons M_x le point de $\mathcal{P}$ défini par

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{i} + f(x)\overrightarrow{j}$$

et $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des points M_x, x parcourant I. Nous noterons OM_x la distance de O à M_x;



Dans ce qui suit, a désigne un point de $\overline{I} \setminus I$.

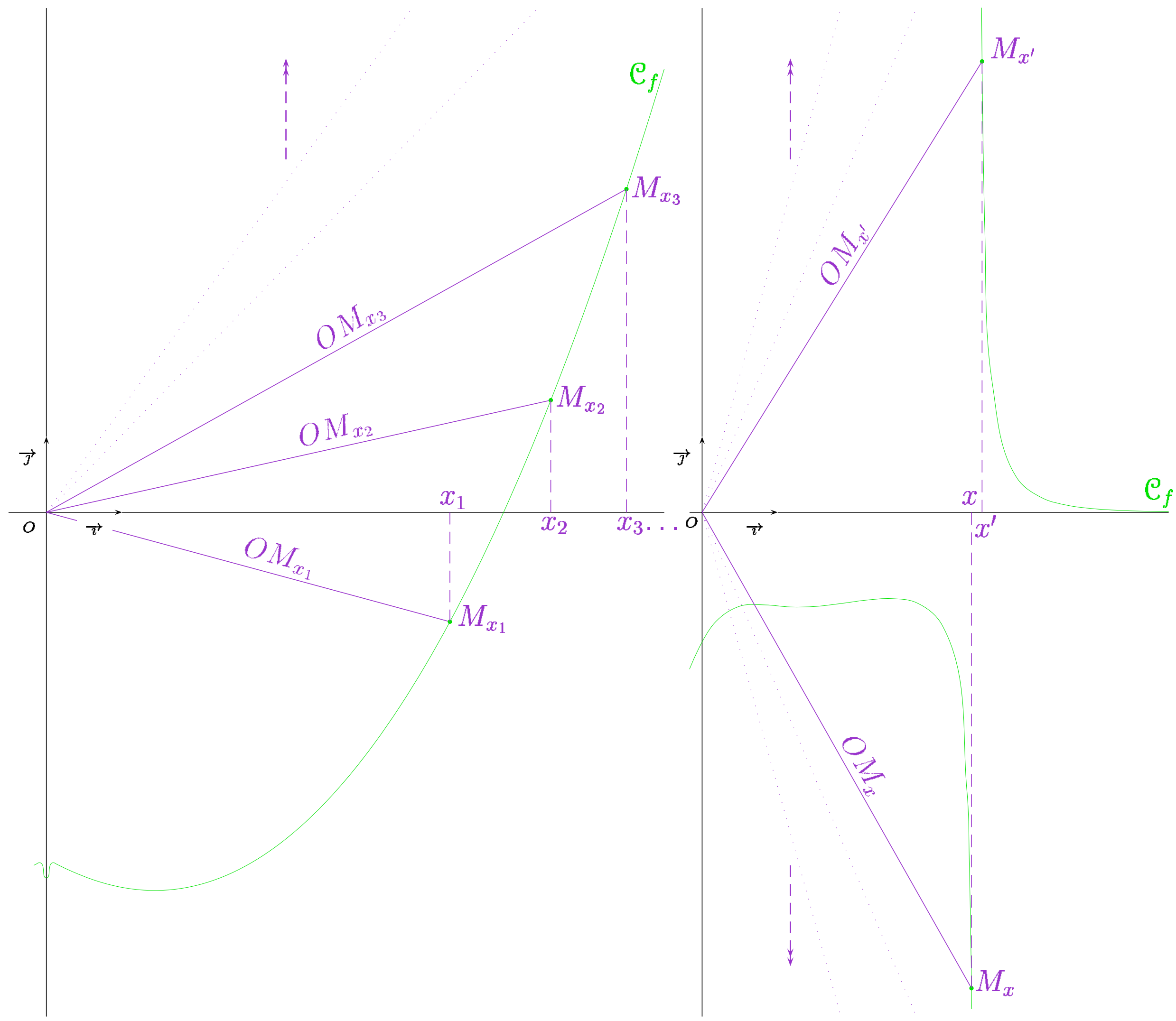
Définition 0.2.1.
Nous dirons que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a si, et seulement si

$$\lim_{x\to a} OM_x = +\infty.$$

Remarque: Cette définition ne dépend pas du point O puisque pour tout point A de $\mathcal{P}$, $AM_x \geq |OM_x - OA|$.

Proposition 0.2.2.
Avec les notations précèdentes:

- Si $a \in \{-\infty, +\infty\}$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a.
- Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a si, et seulement si $|f|$ admet $+\infty$ pour limite en a.



Remarques:

- Si f est continue sur I, $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\lim_a f = +\infty \text{ ou } -\infty.$$

- Dans le cas d'une branche infinie en a, avec a réel, on observe que la distance de M_x à la droite d'équation $x = a$ tend vers 0 quand x tend vers a: Nous dirons que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en a.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $+\infty$ (étant entendu que le cas des branches infinies en $-\infty$ se traite de manière analogue).

Pour effectuer le tracé de cette branche infinie nous sommes naturellement conduits à rechercher une fonction g définie sur I donc le comportement en $+\infty$ est bien connu, et qui soit proche de f au voisinage de $+\infty$.

Définition 0.2.3.
Nous dirons que g est asymptote à f au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si la fonction $(f - g)$ est de limite nulle en $+\infty$.

Exemples:

-

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 + \dfrac{\ln x}{x} \end{array}$$

est asymptote en $+\infty$ à la courbe d'équation $y = x^2$.

◇
$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^3+1}{x^2+2x} \end{array}$$

est asymptote en $+\infty$ à la droite d'équation $y = x - 2$ comme il résulte de l'égalité,

$$f(x) = x - 2 + \frac{4x+1}{x^2+2x}.$$

Pour permettre de reconnaître le cas d'une asymptote affine en $+\infty$, voici la:

Proposition 0.2.4.
$\mathcal{C}_f$ est asymptote au voisinage de $+\infty$ à la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ si, et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x = \beta.$$

Exemple:
$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x+2}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

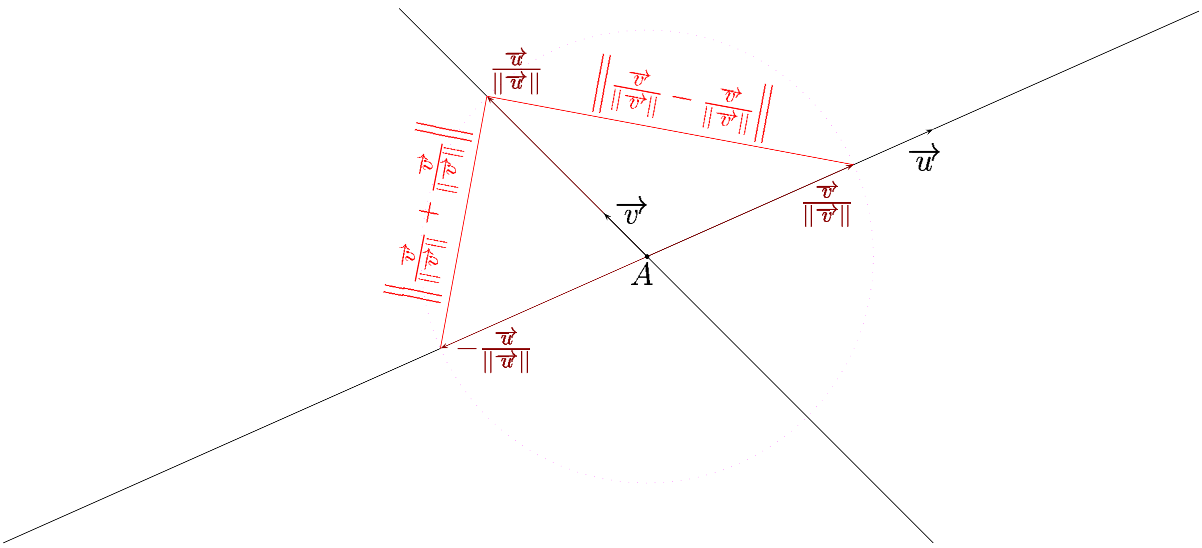
est asymptote au voisinage de $+\infty$ à la droite d'équation $y = x - 1$.

Démonstration.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -1.$$

■

Revenons à l'interprétation géométrique des quantités intervenant dans la proposition.
Le rapport $\frac{f(x)}{x}$ n'est autre que le coefficient directeur de la droite (OM_x).
Munissons l'ensemble des droites du plan passant par un point A du plan de la distance usuelle définie par:

$$\mathrm{d}\left((A,\vec{u}),(A,\vec{v})\right) = \min\left\{\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} - \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|, \left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|\right\}.$$



Supposons alors que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ où } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.$$

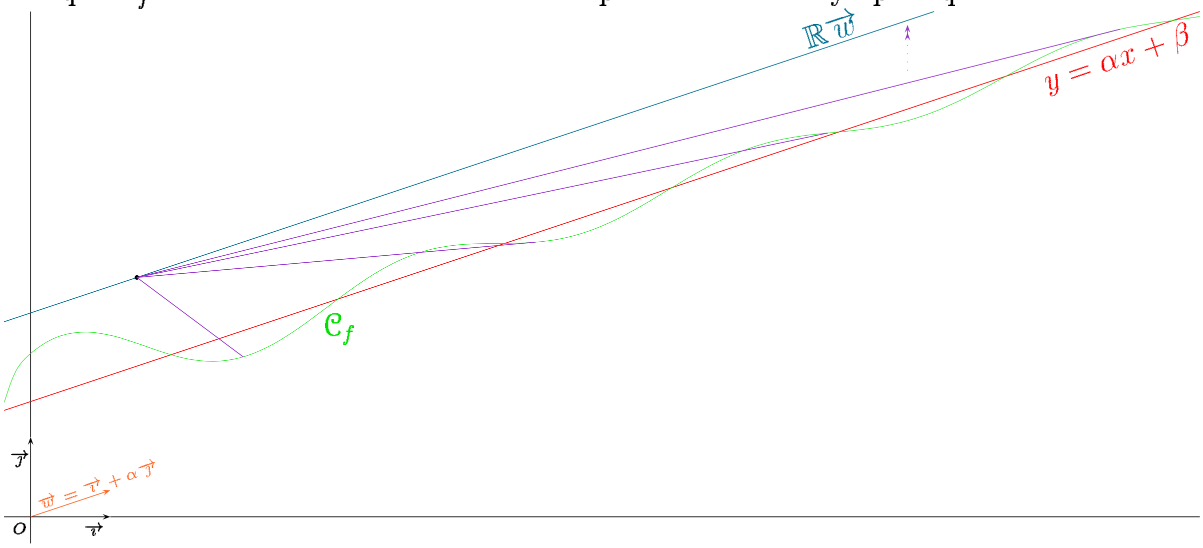
Notons $\overrightarrow{w}$ le vecteur défini par:

$$\overrightarrow{w} = \begin{cases} \overrightarrow{i} + \alpha \overrightarrow{j} & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \\ \overrightarrow{j} & \text{si } \alpha \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases}.$$

Il est facile de vérifier que pour tout point A du plan,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{d}\left((AM_x), (A, \overrightarrow{w})\right) = 0.$$

En ce sens, nous dirons que la droite (AM_x) tend vers la droite $(A, \overrightarrow{w})$ quand x tend vers $+\infty$ et que $\mathcal{C}_f$ admet la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{w}$ pour direction asymptotique.



Remarque: On observe que si $\alpha \in \{+\infty, -\infty\}$, pour tout point A de $\mathcal{P}$ la distance de M_x à la droite $(A, \overrightarrow{w})$ tend vers $+\infty$ et c'est encore le cas lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{+\infty} f = \pm\infty$. Dans tous ces cas de figure, nous dirons que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{w}$ par référence à ce qui se passe pour une branche de parabole.