Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

Cadre:

- ⋄ Les fonctions de cette leçon sont à valeurs réelles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.
- ⋄ On prend comme point de vue sur $\mathbb{R}$ celui d'un corps commutatif totalement ordonné vérifiant l'axiome de la borne supérieure.

Pré-requis:

- ⋄ Les suites réelles (théorème de composition d'une suite et d'une fonction continue).
- ⋄ Une fonction numérique monotone définie sur un intervalle I admet en tout point $x_0 \in \mathring{I}$, une limite à gauche et une limite à droite et que, si f est croissante,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x),$$

les inégalités étant inversées lorsque f décroit.

Introduction: Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels a, b, c, les relations $a \in I$, $c \in I$ et $a < b < c$ impliquent que $b \in I$. La propriété de la borne supérieure permet d'établir qu'il y a exactement neuf types d'intervalles, à savoir $\mathbb{R}$, les ensembles de la formes $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$, $\{x : x \in \mathbb{R}, x < a\}$, $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$, $\{x : x \in \mathbb{R}, x > a\}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\{x : x \in \mathbb{R}, b \leq x \leq a\}$, $\{x : x \in \mathbb{R}, b < x \leq a\}$, $\{x : x \in \mathbb{R}, b \leq x < a\}$, $\{x : x \in \mathbb{R}, b < x < a\}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$.

Les huit derniers ensembles sont notés $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$.

Les intervalles du type $[a, b]$ sont appelés des segments.

0.1 Image d'un intervalle par une fonction continue.

✎ Théorème 0.1.1.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continue sur I, a et b deux points de I (avec $a < b$) tels que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Il existe alors un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

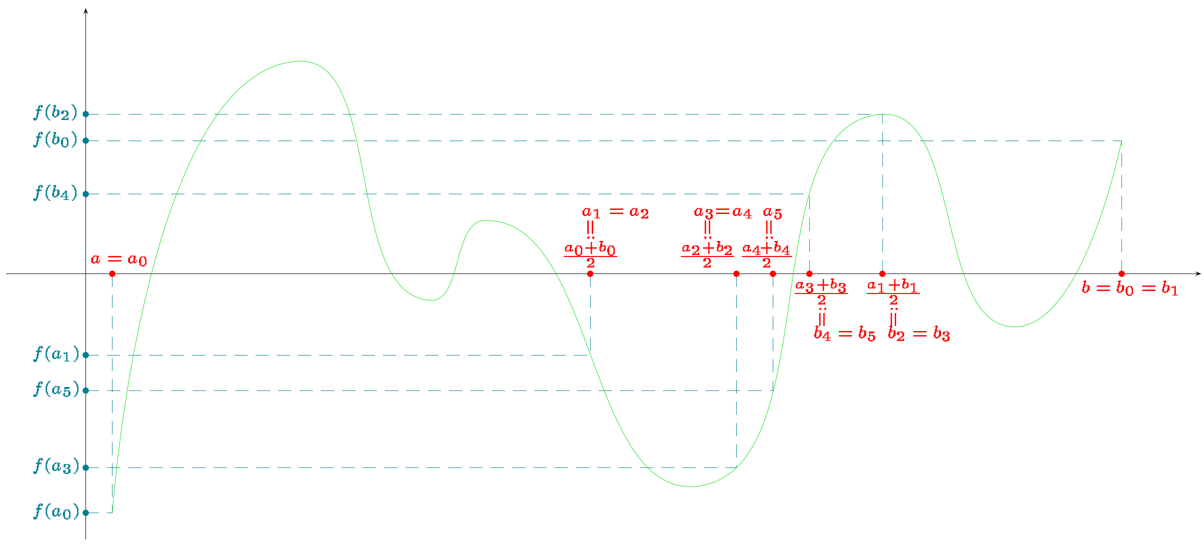
Démonstration. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par les relations:

1.

$$a_0 = a \text{ et } b_0 = b$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{si } f(a_n) \cdot f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0 \\ \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$



On vérifie par récurrence que les suites satisfont à: a_n et b_n sont éléments de $[a, b]$, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$ et $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Il en résulte qu'elles sont adjacentes, que leur limite c commune est élément de $[a, b]$. La fonction f étant continue en c, un passage à la limite dans la première relation donne $(f(c))^2 \leq 0$ donc $f(c) = 0$. ■

Corollaire 0.1.2.
Soit f une application numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit u et v deux éléments de $f(I)$ tels que $u < v$ (on suppose que $f(I)$ n'est pas réduit à un point) et t un nombre réel tel que $u < t < v$. Introduisons deux éléments a et b de I tels que $f(a) = u$ et $f(b) = v$ et g la fonction définie par $g(x) = f(x) - t$, g est continue sur I et vérifie les hypothèses du théorème précédent qui nous garantit l'existence d'un réel c, situé entre a et b (donc dans I), tel que $g(c) = 0$, ainsi $t = f(c)$ est bien un élément de $f(I)$. ■

Remarque: Le type de l'intervalle $f(I)$ peut être différent de celui de I. Par exemple, l'image de l'intervalle semi-ouvert $[-1, 1[$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est l'intervalle fermé $[0, 1]$.
Les deux paragraphes qui suivent précisent cette question.

0.2 Image d'un segment par une fonction continue.

Lemme 0.2.1.
Soit f une fonction numérique définie sur un segment $[a, b]$. Si f est continue sur $[a, b]$, f est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration. Supposons f non bornée sur $[a, b]$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par les relations:

1. $$a_0 = a \text{ et } b_0 = b$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{si } f \text{ est bornée sur } \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] \\ \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{si } f \text{ est non bornée sur } \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] \end{cases}.$$

On vérifie alors par récurrence que les suites ainsi construites satisfont, pour n naturel, à a_n et b_n sont élément de $[a, b]$, f est non bornée sur $[a_n, b_n]$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$ et $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Il en résulte qu'elles sont adjacentes, que leur limite commune c est élément de $[a, b]$. Or f est non bornée sur $[a_n, b_n]$, on peut donc construire une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $c_n \in [a_n, b_n]$ et $|f(c_n)| \geq n$. La première relation nous montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c, ce qui est contradictoire avec la seconde relation si on suppose f continue sur $[a, b]$. ■

✎ Théorème 0.2.2.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, l'image par f de tout segment de I est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $[a, b]$ un segment de I. D'après le lemme précèdent, il existe deux réels m et M tel que $f([a, b])$ soit l'un des intervalles $]m, M[$, $]m, M]$, $[m, M[$, $[m, M]$. On justifiera de l'impossibilité des trois premières formes en introduisant les fonctions $x \mapsto \frac{1}{f(x)-m}$ ou $x \mapsto \frac{1}{M-f(x)}$ dont on orbsevera qu'elles sont définies et continues sur $[a, b]$ sans y être bornées. ■

0.3 Image d'un intervalle par une fonction continue monotone (respectivement strictement monotone).

✎ Théorème 0.3.1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b (a et b éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, $a < b$) et f une application monotone sur I.

Posons

$$\alpha = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}).$$

Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est l'intervalle d'extrémités α, β, ces extrémités étant de même type respectivement de a et b de I si on suppose de plus que f est strictement monotone.

Démonstration. Quitte à raisonner sur $-f$, on va supposer f croissante sur I. Examinons d'abord le cas $I = [a,b]$ avec a, b réels. f étant croissante, $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$. Par ailleurs, f étant continue, c'est un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$, autrement dit qui contient $[f(a), f(b)]$; donc $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Enfin, la continuité de f en a et en b donne:

$$\alpha = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b).$$

Nous ramenons ensuite tout les autres cas de figure à ce qui précède, par exemple, si $I =]a,b[$, nous introduisons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, strictement décroissante pour l'une et strictement croissante pour l'autre de limite respective a et b et telle que pour tout n naturel, $x_n < y_n$. Alors,

$$I =]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n]$$

de sorte que

$$f(I) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f(x_n), f(y_n)].$$

Mais la suite de terme général $f(x_n)$ est décroissante de limite α et la suite de terme général $f(y_n)$ est décroissante de limite β d'où

$$]\alpha, \beta[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f(x_n), f(y_n)] \subset [\alpha, \beta]$$

et la première partie du résultat est vérifiée.

Si nous supposons f strictement croissante sur I, pour tout naturel n, $\alpha < f(x_n) < f(y_n) < \beta$ donc ni α ni β n'appartiennent à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f(x_n), f(y_n)]$ d'où $f(I) =]\alpha, \beta[$. ■

0.4 Caractérisation des fonctions continues sur un intervalle parmi les fonctions monotones.

Nous avons vu que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, la réciproque est fausse mais:

Théorème 0.4.1.
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et monotone sur I. Alors, f est continue sur I si, et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Seul le fait que la condition est suffisante reste à prouver.

Soit donc f monotone sur I telle que $f(I)$ est un intervalle. Quitte à raisonner sur $-f$, on peut supposere f croissante sur I. Ecrivons

$$I = \{x : x \in I, x < x_0\} \cup \{x_0\} \cup \{x : x \in I, x > x_0\}$$

de sorte que $f(I)$ apparaisse comme la réunion de trois ensembles, le premier admettant $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ comme borne supérieure, le second étant le singleton $\{f(x_0)\}$ et le troisième admettant $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ comme borne inférieure. Sachant que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x),$$

l'hypothèse $f(I)$ est un intervalle nécessite bien l'égalité des trois nombres de la relation précèdente, c'est-à-dire la continuité de f en x_0.

On ajustera enfin la démonstration dans le cas où x_0 est une extrémité éventuelle de I. ■

0.5 Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

✎ **Théorème 0.5.1.**
Soit f une application numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur I. Alors f est injective sur I, réalise donc une bijection de I sur $f(I)$ qui est un intervalle J de $\mathbb{R}$ et l'application réciproque f^{-1} qui va de J sur I est strictement monotone, de même sens de variation que f et continue sur J.

Démonstration. Il est clair que la stricte monotonie de f implique son injectivité et que f^{-1} est strictement monotone sur J. Puisque $f^{-1}(J)$ n'est autre que l'intervalle I, on conclut par le théorème précèdent que f^{-1} est continue sur J. ■