Formules de Taylor.

Pré-requis:

◇ Le théorème de Rolle:
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $(a, b) \in I^2$ tel que $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

◇ L'inégalité des accroissements finis:
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $f : I \to E$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Supposons f et g continues sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et telles que:

$$\forall t \in \overset{\circ}{I},\ \|f'(t)\| \leq g'(t)$$

alors, pour tout point a et b de I, on a:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |g(b) - g(a)|.$$

0.1 La formule de Taylor-Young.

Théorème 0.1.1.

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f : I \to E$ une application, a un point de I, $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que f soit dérivable à l'ordre n en a. Alors, il existe une fonction $\varepsilon : I \to E$, de limite nulle en a telle que pour tout x de I:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

Démonstration. Cela revient à prouver que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n l'assertion: pour toute fonction $f : I \to E$, dérivable à l'ordre n en a,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) = 0.$$

◇ P_1 est vraie: c'est la définition même de la dérivablité de f en a.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie et soit $f : I \to E$ dérivable à l'ordre $n+1$ en a. Alors f' est dérivable à l'ordre n en a; f est donc dérivable sur un intervalle J_a centré en a. Soit $\varepsilon > 0$, appliquons P_n à f': il existe un intervalle J'_a centré en a tel que pour tout $t \in J'_a \cap I$:

$$\left\| f'(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) \right\| \leq \varepsilon |t-a|^n.$$

Posons h la fonction définie par

$$h(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

et g telle que

$$g(t) = \frac{\varepsilon}{n+1} |t-a|^n (t-a).$$

g est dérivable sur $I \cap J'_a \cap J_a$ et

$$g'(t) = \varepsilon |t-a|^n.$$

f est dérivable sur $I \cap J_a$ donc h est dérivable sur $I \cap J'_a \cap J_a$ et

$$h'(t) = f'(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a).$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à h et g sur $I \cap J'_a \cap J_a$ donne pour tout x de $I \cap J'_a \cap J_a$,

$$\|h(x) - h(a)\| \leq |g(x) - g(a)|$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{|x-a|^n} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon$$

d'où P_{n+1}.

■

0.2 Les formules à caractère global.

0.2.1 La formule de Taylor-Lagrange.

Cette formule n'est valable que pour les fonctions à valeurs réelles.

Théorème 0.2.1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, admettant une dérivée $(n+1)$-ième sur $\mathring{I}$. Alors pour tous réels distincts a et x de I, il existe un réel c strictement compris entre a et x tel que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - K \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est choisi de tel sorte que $\varphi(a)=0$.

Puisque $\varphi(x)=0$ et φ est dérivable sur $\mathring{I}$, $\exists c \in]a,x[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or,

$$\varphi'(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-t)^{k}}{k!}f^{(k+1)}(t)+K\frac{(x-t)^{n}}{n!}$$

donc $K=f^{(n+1)}(c)$. ∎

0.2.2 La formule de Taylor-Laplace.

Théorème 0.2.2.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, $E=\mathbb{K}^p$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de I dans E. Alors, pour tous a et x de I,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^{k}}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Démonstration. Cela se démontre par récurrence sur n. Le passage de n à $n+1$ s'obtient en opérant une intégration par partie sur

$$\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt:$$

On pose

$$\begin{array}{ll} u(t)=f^{(n+1)}(t) & u'(t)=f^{(n+2)}(t)\\ v'(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!} & v(t)=-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\end{array}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_{t=0}^{x}+\int_a^x\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt\\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt\end{aligned}$$

tout ceci étant bien licite puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. ∎

0.2.3 L'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 0.2.3.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ et f une application de I dans E.

Supoosons que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, dérivable à l'ordre $n+1$ sur $\mathring{I}$ et qu'il existe un réel M_{n+1} tel que pour tout $t\in\mathring{I}$, $\left\|f^{(n+1)}(t)\right\|\le M_{n+1}$. Alors, pour tous a et b réels de I,

$$\left\|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\|\le M_{n+1}\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que c'est immédiat si on est dans le contexte de la formule de Taylor-Laplace.

Sinon, introduisons φ telle que

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$$

et g telle que

$$g(t) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|b-t|^n(t-b),$$

φ est bien dérivable sur $\mathring{I}$ continue sur I et

$$\varphi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

De même pour g et

$$g'(t) = \frac{M_{n+1}}{n!}|b-t|^n.$$

On a donc $\|\varphi'(t)\| \leq g'(t)$ sur $\mathring{I}$ donc

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq |g(b) - g(a)|.$$

■

0.3 Exemples d'application.

0.3.1 De la formule de Taylor-Young.

Cette formule à un caractère local, c'est donc ce type de problème qu'elle va aider à résoudre.

Elle fournit une condition suffisante pour que $f : I \to E$ admette en un point a de I un développement limité à l'ordre n: c'est qu'elle admette une dérivée à l'ordre n en ce point.

Cette possibilité de faire un développement limité à l'ordre n pour f permet de résoudre les problèmes suivant:

- ◇ Détermination de limites.
- ◇ Etude de la position de la courbe représentative d'une fonction de I dans $\mathbb{R}$ par rapport à sa tangente en un point.
- ◇ Etude de la position de la courbe représentative d'une fonction de I dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à sa tangente en un point.

0.3.2 Des formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Laplace.

C'est souvent l'inégalité de Taylor-Lagrange qui est utilisée, mais il arrive quelque fois que l'expression intégrale du reste en permette une majoration plus intérressante. Ainsi, peut on justifier sous certaines conditions le développement en série entière d'une fonction numérique à valeur dans $\mathbb{R}$.

Théorème 0.3.1.
(Développement en série entière)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $a \in \mathring{I}$.

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $J_{a,r} \subset I$ et que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in J_{a,r}$, $\left\|f^{(p)}(t)\right\| \leq M$. Alors, pour tout $x \in J_{a,r}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(x).$$

Démonstration. En effet,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = u_n$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x-a|}{n+2} < \frac{r}{n+2} \leq \frac{1}{2}$$

pour n assez grand, donc u_n converge vers 0. ■

Il se peut que les dérivées ne soient pas uniformément bornées. On exploitera la formule de Taylor-Laplace.

Exercice: Montrer que, $\forall x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(t) = (1+t)^\alpha$ alors

$$f^{(p)}(t) = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-p+1)(1+t)^{\alpha-p}.$$

Ces dérivées successives ne sont pas uniformément bornées sur un intervalle du type $[-r,r]$ où $r < 1$. Mais

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) &= \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n)(1+u)^{\alpha-n-1}\,du \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \frac{(x-u)^n}{(1+u)^n} \cdot (1+u)^{\alpha-1}\,du \end{aligned}$$

Le nombre x étant fixé dans $]-1,1[$, soit

$$g : u \longmapsto \frac{x-u}{1+u}$$

définie sur $]-1,1[$.

On vérifie que g est décroissante de sorte que si $x \leq u \leq 0$ alors $x = g(0) \leq g(u) \leq g(x) = 0$ et que si $0 \leq u \leq x$ alors $0 = g(x) \leq g(u) \leq x$.

En fait, si $|x| \leq r$, alors $|g(u)| \leq r$. Ainsi, pour $r < 1$ et $|x| \leq r$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} r^n \right| \cdot \left| \int_0^x (1+u)^{\alpha-1} \, du \right| = u_n.$$

Or,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| r = r \left| 1 - \frac{\alpha + 1}{n+1} \right|$$

qui peut être rendu plus petit que $k < 1$ pour n assez grand. ■

La formule de Taylor-Lagrange permet de caractériser les fonctions polynômes parmi les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

Proposition 0.3.2.
f est une fonction polynôme si, et seulement si toutes ses dérivées successives sont nulles à partir d'une certain rang.