Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Propriétés et exemples.

Pré-requis:
◇ Pour une application, notion d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
◇ Image d'un intervalle par une fonction numérique continue.

0.1 Fonctions réciproques.

Définition 0.1.1.
Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F.
On dit que f est inversible si, et seulement si il existe une fonction g de F dans E telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

On dit alors que g est l'application réciproque de f.

Proposition 0.1.2.
L'application f admet au plus une application réciproque.

Démonstration. Si g et g' sont deux applications de F dans E telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E = g' \circ f$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F = f \circ g'$, on en déduit que $g' \circ (f \circ g) = g' \circ \mathrm{Id}_F = g'$. Mais l'associativité de la composition des applications permet d'écrire

$$g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{Id}_E \circ g = g.$$

■

Notation: Si f est inversible, on note f^{-1} sa fonction réciproque.
Remarque: Si f admet une fonction réciproque alors f^{-1} en admet une et

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Proposition 0.1.3.
La fonction f est inversible si, et seulement si elle est bijective.

Démonstration. Si f est bijective, chaque élément y de F possède un unique antécédent x de E par f ce qui prouve l'existence et l'unicité de l'application réciproque.

Si f est inversible, $f(x) = f(x')$ implique que $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x'))$ c'est-à-dire $x = x'$ d'où l'injectivité de f. Soit maintenant $y \in F$, pour montrer que f est surjective, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$ or $x = f^{-1}(y)$ convient. ■

0.2 Inversibilité des fonctions numériques de la variable réelle, strictement monotones.

✎ **Proposition 0.2.1.**
Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et f une application strictement monotone de E dans $\mathbb{R}$. Alors f est injective.

Démonstration. Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Si l'on avait $x \neq x'$, la stricte monotonie de f conduirait à une inégalité stricte entre $f(x)$ et $f(x')$. ■

En restreignant l'espace d'arrivée à $f(E)$, nous avons de plus f surjective. Nous dirons alors que f réalise une bijection de E vers $f(E)$.

Remarque: On se gardera de croire que les seules applications numériques de la variable réelle inversibles sont les applications strictement monotones.

Par exemple, l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

est inversible (d'inverse f) mais non monotone.

0.3 Propriétés préservées dans l'inversion des fonctions numériques définies, continues et strictement monotones sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

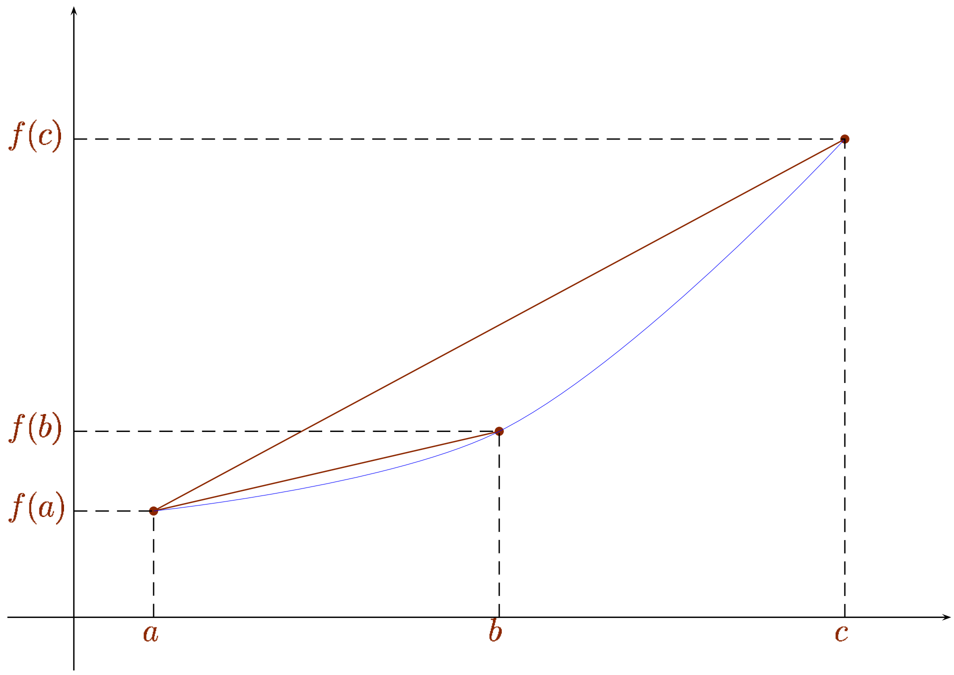
✎ **Proposition 0.3.1.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie, continue et strictement monotone sur I. Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle de $\mathbb{R}$ et:

1. f^{-1} est une application strictement monotone de J sur I, de même sens de variation que f.
2. Si f est impaire, f^{-1} est impaire.
3. Si f est strictement croissante et convexe (respectivement concave), f^{-1} est concave (respectivement convexe) tandis que si f est strictement décroisante et convexe (respectivement concave), il en est de même pour f^{-1}.
4. f^{-1} est continue sur J.
5. Si f est dérivable en un point x_0 de I avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, de nombre dérivé $\frac{1}{f'(x_0)}$.
   En conséquence, si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur J et
   $$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration. 1. Soit x et x' deux éléments de $J = f(I)$ tels que $x < x'$ et supposons que f est strictement croissante.
Si $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(x')$ alors $f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f\left(f^{-1}(x')\right)$, c'est-à-dire $x \geq x'$ ce qui contredit le fait que $x < x'$ donc $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x')$ ce qui signifie que f^{-1} est aussi strictement croissante.

2. On suppose f impaire, c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.
Soit $y \in J$,
$$f^{-1}(-y) = f^{-1}\left(-f\left(f^{-1}(y)\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(-f^{-1}(y)\right)\right) = -f^{-1}(y).$$

3. Soient a, b, c dans I tels que $a < b < c$. Le fait que f soit convexe et strictement croissante se traduit par:



d'où
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
Par conséquent,
$$\frac{f(c)}{c - a} - f(a)\left(\frac{1}{c - a} - \frac{1}{b - a}\right) > \frac{f(b)}{b - a}$$
c'est-à-dire
$$f(b) < \frac{c - b}{c - a} \cdot f(a) + \frac{b - a}{c - a} \cdot f(c).$$
Donc
$$f(b) < \frac{f^{-1}(f(c)) - f^{-1}(f(b))}{f^{-1}(f(c)) - f^{-1}(f(a))} \cdot f(a) + \frac{f^{-1}(f(b)) - f^{-1}(f(a))}{f^{-1}(f(c)) - f^{-1}(f(a))} \cdot f(c),$$
ainsi
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(c))f(b) - f^{-1}(f(a))f(b) \quad &< \quad f^{-1}(f(c))f(a) - f^{-1}(f(b))f(a) \\ &\quad + f^{-1}(f(b))f(c) - f^{-1}(f(a))f(c) \end{aligned}$$

donc
$$f^{-1}(f(b)) > \frac{f(c)-f(b)}{f(c)-f(a)} \cdot f^{-1}(f(a)) + \frac{f(b)-f(a)}{f(c)-f(a)} \cdot f^{-1}(f(c)).$$
Les autres cas se démontrent de la même façon.

4. J est un intervalle car l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. Soit $y_0 \in J$ et $\varepsilon > 0$. Posons $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et supposons par exemple f strictement croissante sur I. Si y_0 n'est pas une extrémité (éventuelle) de J, f^{-1} étant aussi strictement croissante, x_0 n'est pas une extrémité de I, il existe donc a et b dans I tels que
$$x_0 - \varepsilon < a < x_0 < x_0 + \varepsilon.$$
Alors, $f(a) < y_0 < f(b)$. Posons $\alpha = \min(y_0 - f(a), f(b) - y_0)$, c'est un réel stristement positif et pour tout $y \in]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$, on a $f(a) < y < f(b)$ donc par stricte croissance de f^{-1}, $a < f^{-1}(y) < b$ et donc
$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon.$$

5. Soient
$$T_{f^{-1},y_0} : y \in J \setminus \{y_0\} \longmapsto \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$
et
$$t_{f,x_0} : x \in I \setminus \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Pour $y \neq y_0$, $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \neq 0$ et $y - y_0 = f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)$ alors
$$\begin{aligned} T_{f^{-1},y_0}(y) &= \frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}} \\ &= \frac{1}{t_{f,x_0}\left(f^{-1}(y)\right)} \end{aligned}$$
Or f^{-1} est continue en y_0 (car f est dérivable sur I, donc continue sur I) donc
$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$
Par définition de la dérivabilité de f en x_0,
$$\lim_{x \to 0} t_{f,x_0}(x) = f'(x_0).$$
Le théorème de composition des limites donne donc
$$\lim_{y \to y_0} t_{f,x_0}\left(f^{-1}(y)\right) = f'\left(f^{-1}(y_0)\right) = f'(x_0),$$
d'où le résultat en remarquant que $f'(x_0) \neq 0$ (f est strictement croissante).

■

Remarque: Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

0.4 Exemples.

0.4.1 Inversions des fonctions puissances.

Soit

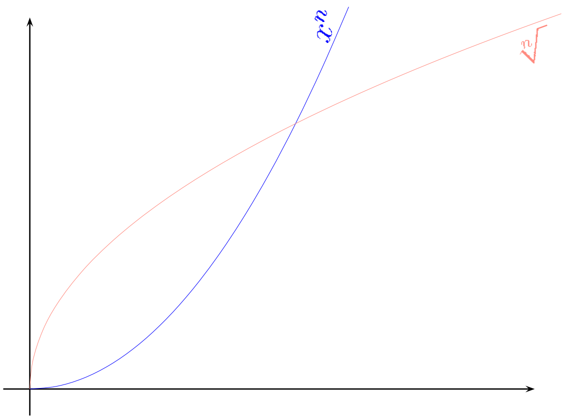
$$f_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \text{ si } n \text{ est un entier naturel impair}$$

et

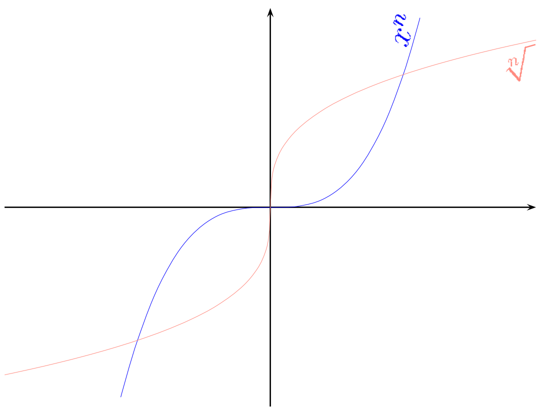
$$f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \text{ si } n \text{ est un entier naturel pair.}$$

Ces deux applications sont strictement croissantes, elles sont donc inversibles. On note indifféremment (mais dans leur domaine de définition respectif) la réciproque $\sqrt[n]{\ }$.

n pair



n impair



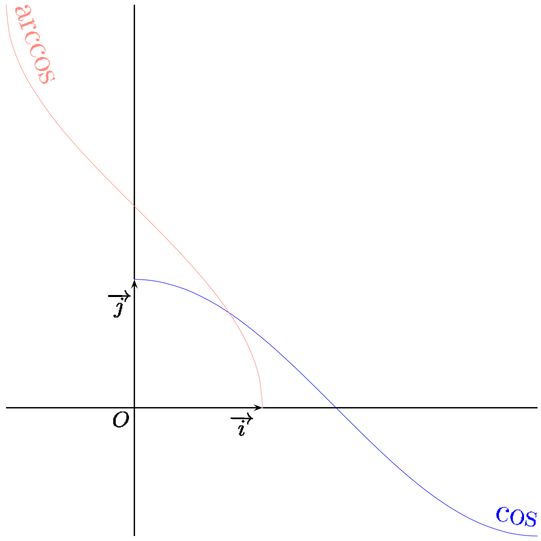
0.4.2 Inversions des fonctions circulaires.

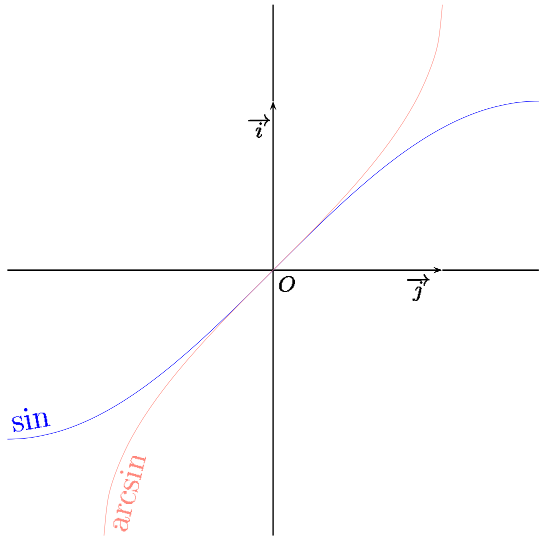
On restreint les fonctions cos et sin à un domaine où elles sont strictement monotones afin qu'il existe des applications réciproques:

$$\cos : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

elles ont alors pour réciproques:

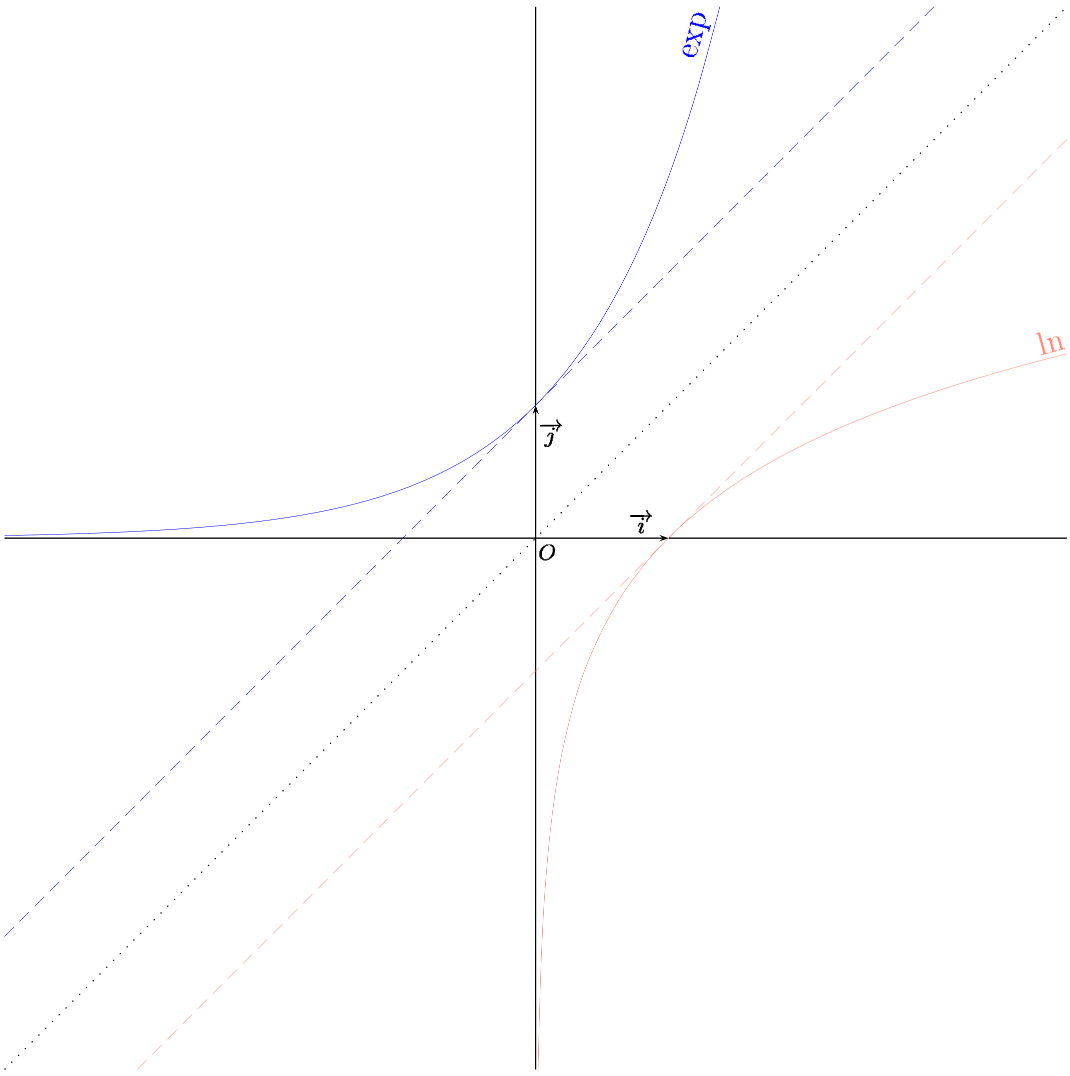
$$\arccos : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array} \quad \text{et} \quad \arcsin : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}.$$





0.4.3 Inversions de la fonction logarithme népérien.

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ d'inverse } \exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*.$$



0.4.4 Inversions des fonctions hyperboliques.

- Soit

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array},$$

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

donc sh est strictement croissante et par conséquent inversible:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad & \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2y \\ & \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = 2ye^x \\ & \Leftrightarrow \quad X^2 - 2yX - 1 = 0 \quad \text{en posant } X = e^x \\ & \qquad \Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 0 \end{aligned}$$

d'où les solutions possibles:

$$X_1 = y - \sqrt{y^2+1} \leq 0 \text{ (impossible)}$$

et

$$X_2 = y + \sqrt{y^2+1}.$$

On a alors,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argsh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{array}.$$

- Soit

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array},$$

qui est aussi inversible et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argch}: & [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \end{array}.$$