Fonctions polynômes.

Cadre: On se place dans un corps $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Pré-requis:
La structure naturelle d'algèbre sur $\mathbb{K}$ de l'ensemble des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ (aussi notée $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$).

0.1 Fonctions polynômes.

Théorème 0.1.1.
Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) forment une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. Le sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions est appelé l'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Notons P_n la fonction $x \mapsto x^n$, nous allons démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre.

Supposons que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \equiv 0$$
alors, $\forall x \in \mathbb{K}$,
$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x^i = -\lambda_n x^n,$$
ainsi pour tout x non nul
$$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x^{i-n}$$
or
$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x^{i-n} = 0$$
(car $i - n < 0$) donc $\lambda_n = 0$, ainsi de proche en proche, on obtient que tous les λ_i sont nuls. ■

Conséquence: Etant donné une fonction polynôme f, il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, à support fini, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que:
$$\forall \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k.$$

Définition 0.1.2.
Si f est une fonction polynôme non identiquement nulle, l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k \neq 0$ est non vide, majoré: il admet un plus grand élément appelé le degré de f et noté $\deg f$.

Convention: On attribue $-\infty$ comme degré à la fonction nulle.

Corollaire 0.1.3.
Soit n un entier naturel. Dire qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est une fonction polynôme de degré $\mathbb{K}$ revient à dire qu'il existe un unique $(n+1)-$uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n-1} \times \mathbb{K}^*$ tel que:

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

a_0, a_1, ..., a_n sont appelés les coefficients de f.

0.2 Structure de l'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{K}$.

Théorème 0.2.1.
L'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre intègre de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.

Démonstration. Il s'agit essentiellement de montrer que si f et g sont des fonctions polynômes, $f \cdot g$ l'est aussi, ce qui résulte du fait que le produit de deux fonctions puissances est une fonction puissance.

Plus précisément, soit

$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

En fixant f et en raisonnant par récurrence sur le degré de g on montre que:

$$f \cdot g : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-p} c_k x^k \quad \text{où } c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i \in [0,n] \\ j \in [0,p]}} a_i b_j.$$

Ceci montre aussi que $\deg f \cdot g = \deg f + \deg g$, ce qui permet de prouver que $f \cdot g$ est la fonction nulle si, et seulement si f ou g l'est. ■

Propriété 0.2.2.
Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

Démonstration. C'est vrai pour les fonctions puissances. ■

Proposition 0.2.3.
Pour tout $a \in \mathbb{K}$, l'espace l'espace des fonctions polynômes n'est autre que l'espace vectoriel engendré par la famille des fonctions $x \mapsto (x-a)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-a)^{n-k} x^k$$

et inversement

$$\begin{aligned} x^n &= ((x-a)+a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} (x-a)^k. \end{aligned}$$

■

Théorème 0.2.4.
(Formule de Taylor pour les fonctions polynômes):
Si f est une fonction polynôme de degré n et si $a \in \mathbb{K}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x-a)^k.$$

Reste à vérifier que $f^{(k)}(a) = k!\lambda_k$, ce qui se fait simplement par récurrence. ■

0.3 Racines et divisibilité.

Définition 0.3.1.
Soit f une fonction polynôme et α un élément de $\mathbb{K}$. On dit que α est une racine de f si, et seulement si $f(\alpha) = 0$.
Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que α est une racine de f d'ordre au moins m si, et seulement si pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $f^{(j)}(\alpha) = 0$.

Proposition 0.3.2.
α est racine de f d'ordre au moins m si, et seulement si f est divisible (dans l'anneau des fonctions polynômes) par la fonction $x \mapsto (x-\alpha)^m$.

Démonstration. Ecartons le cas trivial d'une fonction nulle.

Il résulte immédiatement de la formule de Taylor que si α est racine de f d'ordre au moins m, d'une part que $\deg f \geq m$, d'autre part f est divisible par la fonction $x \mapsto (x-\alpha)^m$.

Réciproquement, si f est divisible par $x \mapsto (x-\alpha)^m$ il existe une fonction g telle que:

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x-\alpha)^m g(x).$$

La formule de Leibniz de dérivation d'un produit donne, pour tout $k \leq m-1$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_n^k \frac{m!}{p!}(x-\alpha)^{m-p} g^{(p)}(x),$$

de sorte que pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $f^{(k)}(\alpha) = 0$: α est donc racine de f d'ordre au moins m. ∎

Proposition 0.3.3.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si p réels distincts α_1, α_2, …, α_p sont racines de f d'ordres respectifs m_1, m_2, …, m_p, alors f est divisible par la fonction

$$x \longmapsto \prod_{k=1}^{p} (x-\alpha_k)^{m_k}.$$

Démonstration. Ceci se démontre par récurrence sur p.

L'initialisation provient de la proposition précédente.

Le passage de p à $p+1$ s'obtient comme suit:

Supposons donné $p+1$ réels distincts α_1, α_2, …, α_{p+1} racines de f d'ordres respectifs m_1, m_2, …, m_{p+1}. Alors d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction polynôme g telle que,

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = \left(\prod_{k=1}^{p}(x-\alpha_k)^{m_k}\right) g(x).$$

En utilisant le formule de Leibniz, nous en déduisons pour k de 0 à $m_{p+1}-1$,

$$f^{(k)}(\alpha_{p+1}) = \sum_{l=1}^{k} \mathrm{C}_k^l \left.\frac{\mathrm{d}^{l-k}}{\mathrm{dx}^{l-k}}\right|_{x=\alpha_{p+1}} \prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{m_i} g^{(l)}(\alpha_{p+1}).$$

Puisque pour tout $k \in [\![0, m_{p+1}-1]\!]$, $f^{(k)}(\alpha_{p+1}) = 0$, nous avons affaire à un système de m_{p+1} équations à m_{p+1} inconnues (les $g^{(k)}(\alpha_{p+1})$), triangulaire aux coefficients diagonaux non nuls ($\prod_{i=1}^{p}(\alpha_{p+1}-\alpha_i)^{m_i}$) avec second membre nul.

On a donc pour tout $k \in [\![0, m_{p+1}-1]\!]$, $g(\alpha_{p+1}) = 0$, g est donc divisible par $x \mapsto (x-\alpha_{p+1})^{m_{p+1}}$. ∎

Corollaire 0.3.4.

1. Une fonction polynôme de degré au plus n ($n \in \mathbb{N}$) possèdant des racines dont le total des ordres de multiplicité est au moins $n+1$ est égale à la fonction nulle.
2. Si deux fonctions polynômes de degré n ($n \in \mathbb{N}$) ont au moins $n+1$ contacts (comptés avec leur ordre), elles sont égales.

0.4 Le cas complexe.

Théorème 0.4.1.
(Théorème de D'Alembert)
Toute fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré supérieur à 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit f définie par $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Nous supposons que $a_n \neq 0$ (sinon 0 est racine).

On organise la démonstration en deux temps:
(i) Prouver que $\inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ est atteint en un point z_0 de $\mathbb{C}$.
(ii) Montrer que $f(z_0) = 0$.
(i) Pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$f(z) = z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right).$$

Ainsi

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty.$$

Il existe $R > 0$ tel que $|z| > R$, $|f(z)| > |f(0)|$, ce qui prouve que

$$\inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = \inf_{|z|\leq R} |f(z)|.$$

Mais $|f|$ est continue sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$: elle atteint son minimum sur la boule fermée de rayon R, donc il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = |f(z_0)|.$$

(ii) Si $f(z_0) \neq 0$, soit alors la fonction polynôme g définie par

$$g(z) = \frac{f(z_0 + z)}{f(z_0)},$$

elle est de degré n;

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i \quad \text{avec} \quad b_n \neq 0 \quad \text{et} \quad b_0 = g(0) = 1.$$

Soit alors

$$k = \inf\{i \in [\![1, n]\!] | b_i \neq 0\},$$

on a

$$g(z) = 1 + \sum_{i=k}^{n} b_i z^i = 1 + b_k z^k (1 + \varphi(z))$$

où

$$\varphi(z) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{b_i}{b_k} z^{i-k}$$

d'où

$$\lim_{z\to 0} \varphi(z) = 0,$$

il existe alors $r > 0$ tel que, pour $|z| < r$, $|\varphi(z)| < \frac{1}{2}$. Pour z tel que $|z| < r$, on a donc

$$|g(z)| \leq \left|1 + b_k z^k\right| + \frac{1}{2}\left|b_k z^k\right|.$$

Posons $b_k = |b_k|e^{i\theta}$ et particularisons z sous la forme $Z = \rho e^{-i\frac{\theta+\pi}{k}}$ avec $\rho \in]0, 1[$ suffisamment voisin de 0 pour que $\rho < r$ et que $1 + b_k Z^k = 1 - |b_k|\rho^k$ soit positif.
Alors $|g(Z)| \leq 1 - |b_k|\rho^k + \frac{1}{2}|b_k|\rho^k < 1$ soit $|f(z_0 + Z)| < |f(z_0)|$ ce qui est absurde. ■

Corollaire 0.4.2.
Toute fonction polynôme sur $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ s'écrit comme produit de n fonctions polynôme de degré 1.

Démonstration. Démonstration par récurrence sur n. ■