Fonctions logarithmes.

Pré-requis:

- ◇ Toute fonction continue sur un intervalle réel non vide et non réduit à un point y admet des primitives.
- ◇ La notion d'intégrale pour une fonction continue sur un segment.
- ◇ Notions de limites, continuité et dérivabilité, en particulier le lien entre la monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée et le théorème de dérivation d'une fonction composée.
- ◇ Le fait que toute fonction strictement monotone et continue sur un intervalle réel réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image.

0.1 Introduction.

Dans un premier temps, il s'agit de déterminer les morphismes de groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ vers le groupe additif $\mathbb{R}$, autrement dit les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

Désignons par $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces morphismes, en leur imposant ici d'être dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}$, alors les applications $y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(xy)$ et $y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x)+f(y)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a

$$xf'(xy) = f'(y).$$

En particulier, pour $y = 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{f'(1)}{x}.$$

De plus, $f(1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 0$.

On en déduit, que les éléments de $\mathcal{L}$ (s'il en existe) sont de la forme kf_0 où f_0 est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 et k un réel.

L'objectif de cette leçon va donc être de confirmer (ou d'infirmer) l'appartenance de f_0 à l'ensemble $\mathcal{L}$.

0.2 Définition et premières propriétés du logarithme népérien.

Définition 0.2.1.
On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
On note cette fonction ln.

Remarque: Il découle directement de la définition que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Conséquences:

- ◇ La fonction ln est nulle en 1, positive sur $]1,+\infty[$ et négative sur $]0,1[$.
- ◇ La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, avec:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Théorème 0.2.2.

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $u : D \to \mathbb{R}$ dérivable sur D et ne prenant pas la valeur zéro. Alors l'application $f = \ln \circ |u|$ est dérivable sur D et $f' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration. Soit $a \in D$ où u est dérivable. Comme u est continue et non nulle en a, il existe un intervalle I ouvert, centré en a tel que sur $I \cap D$ la fonction u garde un signe constant, celui de $u(a)$. Si, par exemple, $u(a) < 0$, alors pour tout $x \in I \cap D$ on a

$$f(x) = \ln(-u(x))$$

et le théorème de dérivation d'une fonction composée fournit

$$f'(x) = \frac{1}{-u(x)} \cdot (-u'(x)).$$

Le cas $u(a) > 0$ est alors immédiat. ■

Exercice: Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ de

$$x \longmapsto \frac{1}{x \ln x}.$$

Démonstration. On remarque que cette fonction est de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est définie par $u(x) = \ln x$.

Alors les primitives recherchées sont:

$$x \longmapsto \begin{cases} \ln(-\ln x) + K & \text{si } x \in]0,1[\\ \ln(\ln x) + K' & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}.$$

■

Théorème 0.2.3.

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration. Considérons la fonction:

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(ax) - \ln a - \ln x.$$

Elle est de dérivée nulle sur $]0,+\infty[$; elle est donc constante sur $]0,+\infty[$ or pour $x = 1$, elle est nulle. ■

Corollaire 0.2.4.

Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ solution de l'équation fonctionnelle "$f(xy) = f(x) + f(y)$" sont les fonctions du type $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto k \ln x$, où k est une constante réelle.

Corollaire 0.2.5.

(i) $\forall a > 0$,
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

(ii) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

(iii) Pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$:
$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i.$$

(iv) $\forall a > 0$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$:
$$\ln a^r = r \ln a.$$

Démonstration. Pour (iv), il faut vérifier que la dérivée de l'application
$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x^r) - r\ln x$$
est nulle puis conclure en prenant $x = 1$. ■

Remarque: Nous supposons connue l'élévation à une puissance rationnelle, mais pas les fonctions exponentielle.

Exercices:

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que les suites de termes général:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$
sont convergentes et que leur limite commune γ vérifie $v_n < \gamma < u_n$, pour tout n.

Démonstration.

1. On remarque que $\forall t \in [x, x+1]$,
$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$$
et en intégrant de x à $x+1$ on obtient l'inégalité large. En dérivant le cas d'égalité, on obtient une contradiction.

2. Il suffit de vérifier que u_n et v_n sont adjacentes.

■

0.3 Etude de la fonction logarithme népérien.

Rappelons que la fonction ln est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$. Elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $\ln(I)$, dont nous allons préciser les bornes.

0.3.1 Limites aux bornes de $]0, +\infty[$.

Propriétés 0.3.1.

(i)
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

(ii)
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

Démonstration. $\ln 2 > 0$, pour tout réel A, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ln 2 > A$, c'est-à-dire $\ln 2^n > A$. On en déduit que pour tout $x > 2^n$, $\ln x > A$, d'où (i).

On obtient alors (ii) en écrivant $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et en appliquant (i). ■

0.3.2 Le nombre e et quelques limites utiles.

La fonction ln est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, ce qui légitime la définition suivante:

Définition 0.3.2.
L'unique réel strictement positif dont le logarithme népérien est égal à 1 est noté e.

Propriétés 0.3.3.

(i)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

(ii)
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0.$$

(iii)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration. (i) L'étude des variations de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x - \ln x$ donne $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x$, on en déduit que $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ et donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

d'où le résultat.

(ii) Il suffit d'écrire $x \ln x = \frac{-\ln x^{-1}}{x^{-1}}$ et d'appliquer (i).

(iii) $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{1+x-1} = 1.$$

■

Exercice: La fonction ln n'est pas une fonction rationnelle.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe deux fonctions polynômes à coefficients réels, f et g telles que pour tout $x > 0$ on ait

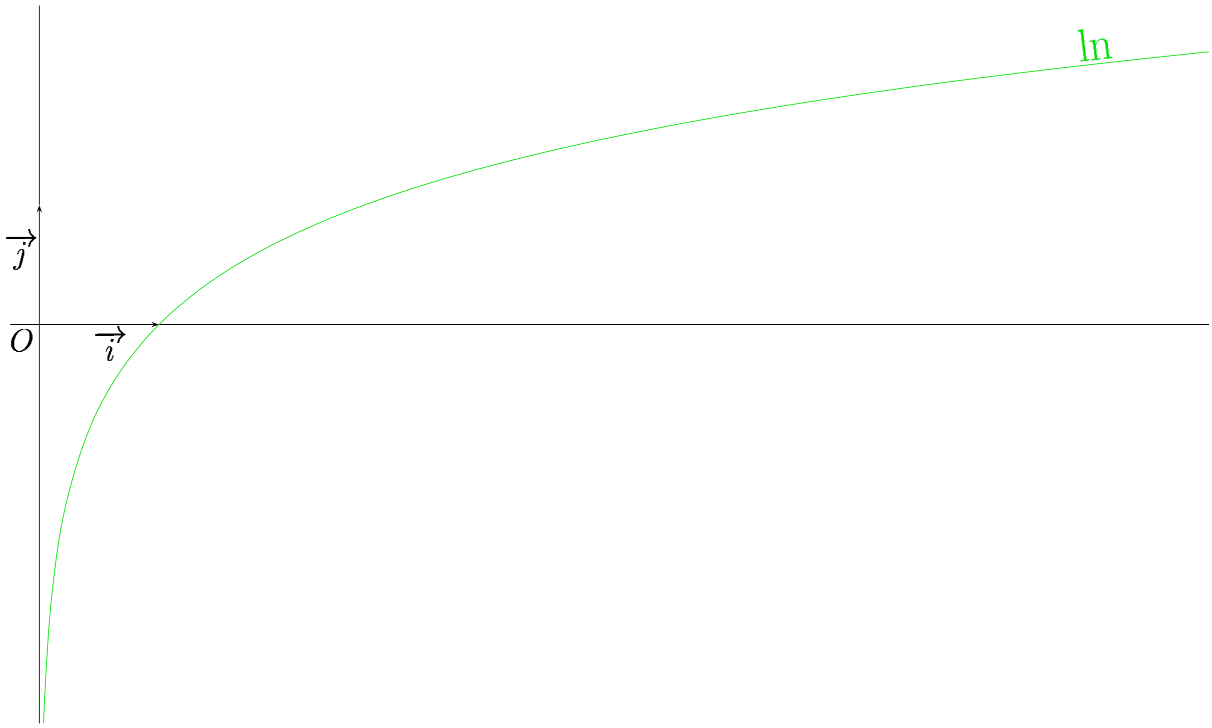
$$\ln x = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Alors $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$ impose que $\deg f > \deg g$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\deg f < \deg g + 1$ ce qui est impossible. ■

0.3.3 Représentation graphique.

On fait le graphique suivant, en signalant qu'elle est concave et en utilisant ses propriétés.



0.4 Les fonctions logarithmes.

Ce sont les applications du type

$$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto k \ln x \quad \text{où } k \in \mathbb{R}^*;$$

se sont donc les isomorphismes dérivables de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

L'aspect bijectif de la fonction ln permet d'affirmer, pour tout réel non nul k, l'existence d'un unique réel a ($a > 0$, $a \neq 1$) tel que $k = \frac{1}{\ln a}$.

Définition 0.4.1.

Pour tout réel a, strictement positif et distinct de 1, on appelle logarithme de base a, l'application

$$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

et on la note $\log_a$.

Remarques:

- Le logarithme népérien est donc le logarithme en base e.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^2$,

$$\log_b(x) = \log_b(a) \log_a(x).$$

Exercice: Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, notons $\mathcal{C}_a$ la représentation graphique de $\log_a$ et $\mathcal{C}$ celle de ln.

Vérifier que $\mathcal{C}_a$ se déduit de $\mathcal{C}$ par une affinité d'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$, de direction $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ et de rapport $\frac{1}{\ln a}$.