Fonctions exponentielles.

Pré-requis:

◇ Notions de limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$, de continuité et de dérivabilité pour les fonctions réelles de la variable réelle, avec notamment:
  - Le lien entre sens de variation et le signe de la dérivée.
  - Le lien entre convexité et le signe de la dérivée seconde.
  - Le théorème de dérivation d'une fonction composée.

◇ Le théorème d'existence d'une bijection réciproque pour une application continue et strictement monotone sur un intervalle et les propriétés de cette réciproque.

◇ La connaissance des fonctions logarithmes:
  - Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors
    $$\log_a : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$
    où ln est le logarithme népérien.
  - Ces fonctions sont des bijections continues et strictement monotones de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$.

0.1 Introduction.

Pour tout réel a non nul, l'application $f_a : n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n$ (avec la convention $a^0 = 1$) satisfait à:

$$f_a(n+m) = f_a(n)f_a(m) \quad \text{pour tous entiers } n \text{ et } m.$$

Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on définie

$$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \sqrt[q]{x}$$

l'application réciproque de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^q$.

Lorsque $a > 0$, on note $a^{\frac{1}{q}}$ le nombre $\sqrt[q]{a}$.

Si r est un rationnel dont un représentant est $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a^r = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

et on montre que l'application $f_a : r \in \mathbb{Q} \mapsto a^r$ satisfait aussi à la condition:

$$f_a(r+s) = f_a(r)f_a(s)$$

pour tous rationnels a et s.

Il est donc naturel de rechercher l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tous réels x, y:

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

$\mathcal{E}$ est non vide puisque la fonction nulle en fait partie.

Si $f \in \mathcal{E}$ et si f s'annule en un point a alors $f \equiv 0$, en effet

$$f(x) = f(x-a+a) = f(x-a)f(a) = 0.$$

Si $f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, alors $f > 0$ car $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Les éléments de $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ sont donc des morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$. Or les fonctions logarithmes sont des isomorphismes de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ vers $(\mathbb{R}, +)$; leurs réciproques fourniront des éléments de $\mathcal{E}$ et nous montrerons que l'on obtient ainsi tous les éléments continus de $\mathcal{E} \setminus \{0\}$.

0.2 Définition des fonctions exponentielles. Premières conséquences.

Définition 0.2.1.
Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on appelle fonction exponentielle de base a la bijection réciproque de la fonction logarithme en base a.
On note cette fonction $\exp_a$.

Conséquences:

- L'application $\exp_a$ est une bijection continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$, caractérisée par:
$$\begin{cases} y = \exp_a x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a y = x \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$
En particulier, $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$.
- Cette application est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$. c'est-à-dire:
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp_a(x + y) = (\exp_a(x))\,(\exp_a(y)).$$

Propriétés 0.2.2.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a x}.$$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y}.$$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in_I R^n$,
$$\exp_a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp_a(x_i).$$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$,
$$\exp_a(rs) = (\exp_a x)^r.$$

Démonstration. Pour 4., il suffit de considérer le logarithme en base a de chaque membre, en rappelant que $\log_a y^r = r \log_a y$. ■

Notations: D'après 4., $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exp_a r = a^r$. La fonction $\exp_a$ prolonge donc à $\mathbb{R}$ l'application $f_a : r \in \mathbb{Q} \mapsto a^r$ et étant la formule $f_a(r + s) = f_a(r) f_a(s)$ aux réels.

Cette remarque conduit à poser la notation:
$$a^x = \exp_a x.$$

Propriétés 0.2.3.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a:

1. $$a^x = e^{x \ln a}.$$

2. $$\ln a^x = x \ln a.$$

3. $$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Démonstration. Pour 1., il suffit de passer au $\log_a$ dans chaque membre et 2. en découle.
En appliquant 2. on obtient

$$\ln(a^x)^y = y \ln a^x = xy \ln a$$

d'où

$$\log_a(a^x)^y = xy.$$

■

Convention: Si $a = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x \ln a} = 1$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$, $a^r = 1$ il est alors légitime de poser

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ 1^x = 1.$$

0.3 Etude des fonctions exponentielles.

Afin de réduire les énoncé à leur "taille minimale", seul le cas de la fonction $\exp_e$ (notée exp) sera détaillée dans ce qui suit.
L'adaptation des preuves dans le cas des fonctions $\exp_a$ est immédiate en remarquant que

$$\exp_a = \exp \circ f \quad \text{où} \quad f : x \in \mathbb{R} \mapsto x \ln a.$$

Théorème 0.3.1.
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec sa dérivée.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème de dérivation d'une fonction réciproque, en notant que la fonction dérivée de ln ne s'annule jamais. ■

Conséquence: $\forall a > 0$,
$$\exp_a' = (\ln a) \exp_a .$$

Corollaire 0.3.2.
Soit u une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivable en un point x_0 de D. Alors, l'application $f : x \in D \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable en x_0 et on a:

$$f'(x_0) = u'(x_0) f(x_0).$$

Théorème 0.3.3.

Avec les notations précédentes on a:

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

(ii)

$$\lim_{x\to +\infty} \exp x = +\infty.$$

(iii)

$$\lim_{x\to -\infty} \exp x = 0.$$

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty.$$

(v) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha \exp x = 0.$$

Démonstration. Pour (i) il suffit de remarquer qur c'est la dérivée de exp en 0.

Pour (ii) et (iii) il suffit d'écrire respectivement:

Soit $A > 0$, alors $\forall x > \ln A$, on $\exp x > A$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\forall x < \ln \varepsilon$, on a $0 < \exp x < \varepsilon$.

Pour (iv) on utilise le fait que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

et on écrit

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{\exp x} &= \frac{\exp(\alpha \ln x)}{\exp x} \\ &= \exp\left(x\left(\alpha\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right), \end{aligned}$$

et l'on conclut en remarquant que cette fonction de x est strictement positive et tend vers 0 en $+\infty$.

(v) résulte du fait que

$$|x|^\alpha \exp x = \frac{(-x)^\alpha}{\exp(-x)}$$

lorsque $x < 0$ et de (iv). ∎

Exercice: Vérifier que pour α réel, on a:

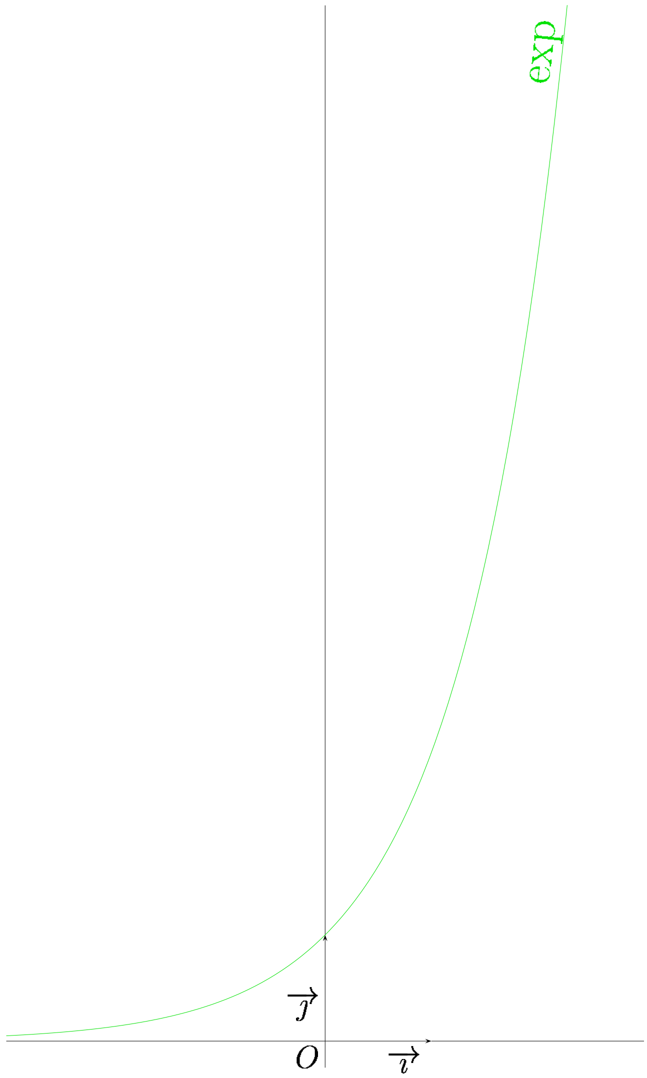
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

0.4 Résumé et représentation graphique.

Voici le tableau de variations de exp sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'$	$+$	
$\exp$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on interprète les résultats précédents; asymptote $(O, \overrightarrow{\imath})$ et branche parabolique $(O, \overrightarrow{\jmath})$. On signalera que la fonction exp est convexe en donnant une représentation graphique; cette dernière se déduit de la représentation graphique de ln par la symétrie d'axe $(O, \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath})$ de direction $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.



0.5 Les solutions continues de "$f(x+y) = f(x)f(y)$".

Rappelons que toute fonction non nulle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et que les fonctions exponentielles sont des solutions: montrons que se sont les seules:

Théorème 0.5.1.
Soit f une solution continue de l'équation fonctionnelle considérée. Alors:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$,

$$f(rx) = (f(x))^r.$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x \quad \text{où } a = f(1).$$

Démonstration. On démontre tout d'abord par récurrence sur n que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, $f(nx) = (f(x))^n$ en remarquant que pour $n = 0$, $f(0) = 1$ (car $f(0) = f(0)f(0)$).

Ensuite, on montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = (f(x))^n$ en observant que $f(0) = f(x)f(-x)$ et donc $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ puis que pour n entier négatif:

$$f(nx) = f(-(-nx)).$$

Posons $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$f(rx) = \left(f\left(\frac{x}{q}\right)\right)^p \quad \text{et} \quad \left(f\left(\frac{x}{q}\right)\right)^q = f(x)$$

d'où

$$f(rx) = \left(f\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{q\cdot\frac{p}{q}} = (f(x))^r.$$

Posons $a = f(1)$, nous venons de montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = a^r$. Soit x un réel et (r_n) une suite de rationnels qui converge vers x. f étant continue en x on a $f(x) = \lim(f(r_n)) = \lim a^{r_n}$ et la continuité de la fonction exponentielle permet de conclure. ∎

Conséquence: Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sont la fonction nulle et les fonctions exponentielles.