Fonctions dérivées. Opérations algèbriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

Cadre: Les fonctions numériques f définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pré-requis:
- ◇ Notions de limite et de continuité pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (opérations algèbriques et théorème de composition des applications continues)
- ◇ Notion de dérivabilité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
  Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in E$ non isolé. On dit que f est dérivable en a si, et seulement si
  $$x \in E \setminus \{a\} \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
  admet une limite finie en a que l'on notera $f'(a)$ ou encore si, et seulement si
  $$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$$
  avec $\lim_a \varepsilon = 0$.
- ◇ Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.
- ◇ Notion de dérivée à gauche et de dérivée à droite.
- ◇ Les définitions des fonctions cosinus et sinus.
- ◇ Les formules trigonométriques.

Introduction.

Le titre de l'exposé précise bien "fonctions dérivées"; il ne s'agit donc pas de présenter une leçon sur la dérivabilité en point. Nous nous contenterons ici de donner un formulaire avec leurs domaines d'applications. Par conséquent, on centrera l'exposé sur les opérations algébriques et la composition, qui permettent de calculer les dérivées des fonctions construites à partir des fonctions élémentaires.

0.1 Fonction dérivée d'ordre 1.

0.1.1 Définition.

✎ **Définition 0.1.1.**
Soit E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, et E_1 l'ensemble des points de E en lesquels f est dérivable.
Si E_1 est non vide alors l'application
$$x \in E_1 \longmapsto f'(x)$$
est appelée la fonction dérivée de f (ou dérivée d'ordre 1 de f) et notée f' (ou encore $f^{(1)}$).

Remarque: E_1 peut être vide; considérer la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exemples:

◇ La fonction dérivée de la fonction constante est nulle et celle de l'identité vaut 1.

Démonstration. • Soient $f : x \in E \mapsto c$ avec c une constante et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0,$$

d'où le résultat.

• Soient $f : x \in E \mapsto x$ et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1,$$

d'où le résultat.

■

◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \in \mathbb{R}^* \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration. Soient $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{xa},$$

d'où le résultat. ■

◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{|x|}$.

Démonstration. Il suffit de rappeler la définition de $|x|$:

$$|x| := \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

■

◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. Soient $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

d'où le résultat. ■

◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto nx^{n-1}$.

Démonstration. $\forall (a, h) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k h^k a^{n-k} = a^n + na^{n-1}h + O_0\left(h^2\right).$$

■

◇ En admettant que la fonction sinus est dérivable en 0 avec $(\sin)'(0) = 1$, on a alors:

$$(\sin)' : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x \ \text{ et } \ (\cos)' : x \in \mathbb{R} \mapsto -\sin x.$$

Démonstration. Posons pour tout h non nul,

$$\tau := \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h},$$

on a alors par les formule trigonométriques que:

$$\tau = \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin a - \sin a}{h} = \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h},$$

comme $\cos h - 1 = -2\sin^2 \frac{h}{2}$, on obtient

$$\tau = -\sin a \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos a \frac{\sin h}{h},$$

qui admet pour limite $\cos a$. On établit le second résultat de la même façon. ■

0.1.2 Opérations algèbriques.

Notons $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des applications de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivable sur E.

Théorème 0.1.2.
Soient f et g deux éléments de $\mathcal{D}(E)$. Alors:

1. $$f + g \in \mathcal{D}(E) \ \text{ et } \ (f+g)' = f' + g'.$$
2. $$fg \in \mathcal{D}(E) \ \text{ et } \ (fg)' = f'g + fg'.$$
3. Soit $a \in E$ tel que $g(a) \neq 0$, alors il existe un intervalle I_a ouvert centré en a tel que $\frac{f}{g}$ soit définie sur $I_a \cap E$ et $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(E \cap I_a)$ avec
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration. Soit $a \in E$,

1. évident.
2. Pour tout $x \in E \setminus \{a\}$,
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
et on conclut en rappelant que g est continue en a.

3. g est continue et non nulle en a d'où l'existence de I_a où g est non nulle.
$\forall x \in (I_a \cap E) \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}\right)=-\frac{1}{g(x)g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Donc $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$ et on conclut grâce à 2. en remarquant que $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$.

■

Corollaire 0.1.3.
Si f est un élément de $\mathcal{D}(E)$ et λ un réel, alors:

1. $$\lambda f \in \mathcal{D}(E) \text{ et } (\lambda f)'=\lambda f'.$$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$f^n \in \mathcal{D}(E) \text{ et } (f^n)'=nf^{n-1}f'.$$

Démonstration. Dans 1. et 2. on utilise la deuxième insertion du théorème, pour 2. on l'établit par récurrence. ■

Conséquence: $\mathcal{D}(E)$ est un sous-espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{R}$.
Exemples:

- On retrouve la dérivabilité de $x \mapsto x^n$ ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on peut désormais étendre pour $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^n$ ($n \le -1$) qui a pour dérivée $x \in \mathbb{R}^* \mapsto nx^{n-1}$.
- On en déduit qu'une fonction polynôme possède une fonction dérivée sur $\mathbb{R}$, et qu'une fonction rationnelle à une fonction dérivée sur son domaine de définition.
- L'application
$$x \in E \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ où } E=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
est dérivable sur E et
$$(\tan)'=\frac{1}{\cos^2}=1+\tan^2.$$

Exercice: Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$$

en dérivant de deux manières différentes $(1+x)^n$.

0.1.3 Dérivée d'une fonction composée.

Théorème 0.1.4.
Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$, avec $f(E) \subseteq F$ et a un point de E.
Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'=(g' \circ f)\cdot f'.$$

Démonstration. Soit h la fonction définie sur F par

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } y = f(a) \end{cases},$$

elle est continue sur F et

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La continuité de f en a et celle de h en $f(a)$ assure le résultat. ∎

Conséquence: Si $f \in \mathcal{D}(E)$ et $g \in \mathcal{D}(E)$ alors $g \circ f \in \mathcal{D}(E)$.

Exemples:

◇ En composant f avec $x \mapsto \frac{1}{x}$ on retrouve la dérivation de $\frac{1}{f}$ énoncé plus haut.

◇ Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}_+$; pour tout point a de E en lequel f est dérivable et non nulle, l'application $h : x \in E \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable en a et

$$h' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

◇ Soit E une partie de $\mathbb{R}$ telle que si $x \in E$ alors $-x \in E$. Si f est dérivable en $-a$ alors $g : x \in E \mapsto f(-x)$ est dérivable en a et $g'_{|a} = -f'_{|-a}$.
On en déduit que la dérivée d'une fonction dérivable paire (respectivement impaire) est impaire (respectivement paire).

◇ Soit E une partie de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel T non nul pour lequel $x \in E$ si, et seulement si $x + T \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ ayant T pour période.
Si f est dérivable en $a \in E$ alors f est dérivable en tout point de la forme $a + nT$ où $n \in \mathbb{Z}$, et

$$f'(a + nT) = f'(a).$$

Conséquence: Si f est définie sur $\mathbb{R}$ de période T et dérivable sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + T]$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est de période T.

0.2 Dérivées d'ordre supérieur.

✎ **Définition 0.2.1.**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit que f est dérivable à l'ordre n sur E (ou admet une dérivée d'ordre n, ou encore une dérivée n-ième) s'il existe des applications $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ dérivables sur E, telles que:

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{k+1} = f'_k \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n-2]\!] \end{cases}.$$

La dérivée d'ordre n est alors $(f_{n-1})'$: on la note $f^{(n)}$.

2. On dit que f est dérivable à l'ordre n (ou admet une dérivée d'ordre n, ou encore une dérivée n-ième) en $a \in E$ si il existe $E_{n-1} \subseteq E$ avec $a \in E_{n-1}$, tel que f soit dérivable à l'ordre $n - 1$ sur E_{n-1} et tel que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a: on écrit alors $f^{(n)}(a)$ pour $\left(f^{(n-1)}\right)'(a)$.

Remarques:

- f est dérivable à l'ordre n sur E si, et seulement si f est dérivable à l'ordre n en tout point de E.
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$:
$$f^{(n+m)} = \left(f^{(n)}\right)^{(m)}$$
en prenant pour convention $f^{(0)} = f$.

Exemples:

- Soit $p \in \mathbb{N}$. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^p$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet une dérivée d'ordre n sur $\mathbb{R}$) et pour tout entier naturel k, on a pour tout x réel:
$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k} & \text{si } 0 \leq k \leq p \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases}$$
avec la convention $0^0 = 1$ et $0! = 1$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\} \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ et pour tout n on a:
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}}.$$

Notons $\mathcal{D}^n(E)$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$, ayant une dérivée d'ordre n sur E.

Remarque: $\mathcal{D}^n(E)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$.

Proposition 0.2.2.

(Formule de Leibniz)

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{D}^n(E)$ alors il en est de même pour fg et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. Le résultat est clair pour $n = 0$ et pour $n = 1$, il résulte de $(fg)' = f'g + fg'$.

Soit $n \geq 1$, supposons la proposition vérifiée au rang $n-1$: Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}^n(E)$ alors $f'g + fg' \in \mathcal{D}^{n-1}(E)$ c'est-à-dire $(fg)' \in \mathcal{D}^{n-1}(E)$ et donc $(fg)^{(n)}$ existe.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \left((fg)'\right)^{(n-1)} \\
&= (f'g)^{(n-1)} + (fg')^{(n-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= \underbrace{C_{n-1}^{n-1}}_{=C_n^n} f^{(n)} g + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right)}_{=C_n^k} f^{(k)} g^{(n-k)} + \underbrace{C_{n-1}^0}_{=C_n^0} f g^{(n)}
\end{aligned}$$

■