Fonctions convexes.

Cadre: Fonctions numériques définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Pré-requis:

- Si f est continue sur I, dérivable à droite (respectivement à gauche) sur $\mathring{I}$, il y a équivalence entre $f'_d \geq 0$ (respectivement $f'_g \geq 0$) sur $\mathring{I}$ et f croissante sur I.
- La notion de convexité d'une partie X de $\mathbb{R}^2$.

0.1 Fonction convexe.

Théorème 0.1.1.
Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

(ii) $\forall (x,y,z) \in I^3$, la relation $x < y < z$ implique:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

ou

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

ou

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

(iii) $\forall (x,y,z) \in I^3$, la relation $x < y < z$ implique:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

(iv) $\forall a \in I$,

$$F_a : x \in I \setminus \{a\} \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est convexe si, et seulemnt si f vérifie ces propriétés et on dit que f est concave si, et seulement si $-f$ est convexe.

Démonstration. $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Puisque $x < y < z$, alors $y = tx + (1-t)z$ avec $t \in]0,1[$, ainsi

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \underbrace{\frac{(t-1)f(x)+(1-t)f(z)}{(t-1)x+(1-t)z}}_{\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}}.$$

$y = tx + (1-t)z$ donc $x = \frac{1}{t}y + \left(1 - \frac{1}{t}\right)z$ d'où,

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \underbrace{\frac{f(z) - \frac{1}{t}f(y) - \left(1-\frac{1}{t}\right)f(z)}{z - \frac{1}{t}y - \left(1-\frac{1}{t}\right)z}}_{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}}.$$

La troisième inégalité provient des deux autres.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Supposons que l'on ait:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

alors

$$(z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x))$$

car $z - x > 0$ et $y - x > 0$, en développant:

$$zf(y) - zf(x) - xf(y) + xf(x) \leq yf(z) - yf(x) - xf(z) + xf(x)$$

ainsi

$$\underbrace{zf(y) - zf(x) - xf(y) - yf(z) + yf(x) + xf(z)}_{:= N} \leq 0.$$

Or

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = \frac{N}{(z-x)(z-y)} \leq 0.$$

On ferait de même en supposant l'une des deux autres inégalités.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)}}$ Il suffit d'écrire (iii) avec $x < y < a$, $x < a < y$ et $a < x < y$.

$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}}$

$$\begin{aligned}
f(tx+(1-t)y) &= \frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{tx+(1-t)y-x}(t-1)(x-y)+f(x) \\
&\leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-1)(x-y)+f(x) \\
&\quad \text{car } tx+(1-t)y \leq y
\end{aligned}$$

■

0.2 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes.

✎ **Proposition 0.2.1.**

Si f est une fonction convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$ donc continue sur $\mathring{I}$. De plus, pour tout $a \in \mathring{I}$, $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Enfin, les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$.

Démonstration. Soit $x < a < y$, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

or

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(a)-f(y)}{a-y}$$

est fini donc $\lim_{x\to a, x<a} F_a(x)$ existe car F_a est croissante majorée.

Pour la limite à droite on fait de même avec $y < a < x$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Le reste découle directement du fait que F_a soit croissante. ∎

0.3 Critères de convexité.

Proposition 0.3.1.
Supposons I ouvert. Alors f est convexe sur I si, et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites:

1. f est continue sur I.
2. f est dérivable à droite sur I.
3. f'_d est croissante sur I.

Démonstration. La proposition précédente donne le sens direct puisque I ouvert implique $I = \overset{\circ}{I}$.

Pour la réciproque, x, y et z étant donnés dans I tels que $x < y < z$, on introduit la fonction g définie sur I par

$$g(t) = f(t) - f(y) - (t-y)f'_d(y).$$

Cette fonction est continue sur I, dérivable à droite sur I et $g'_d(t) = f'_d(t) - f'_d(y)$. Il en résulte que g est décroissante sur $[x, y]$ et croissante sur $[y, z]$. On arrive alors à:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_d(y) \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

∎

Proposition 0.3.2.
Supposons f continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est convexe sur I si, et seulement si f' est croissante sur $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration. La partie directe résulte de la proposition précédente car si f est convexe sur I elle l'est à fortiori sur $\overset{\circ}{I}$.

Réciproquement, si on suppose f' croissante sur $\overset{\circ}{I}$, la proposition précédente permet d'affirmer que f est convexe sur $\overset{\circ}{I}$.

Supposons que $I = [a, b[$ avec $a < b$ et a réel. Il suffit de prouver que si x et y sont deux réels de I tels que $a < x < y$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Mais la convexité de f sur $_{i}nteI$ nous assure que pour tout réel u tel que $a < u < x < y$, on a

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

La fonction f étant continue en a, un passage à la limite permet de conclure. ■

0.4 Interprétation géométrique de la convexité d'une fonction.

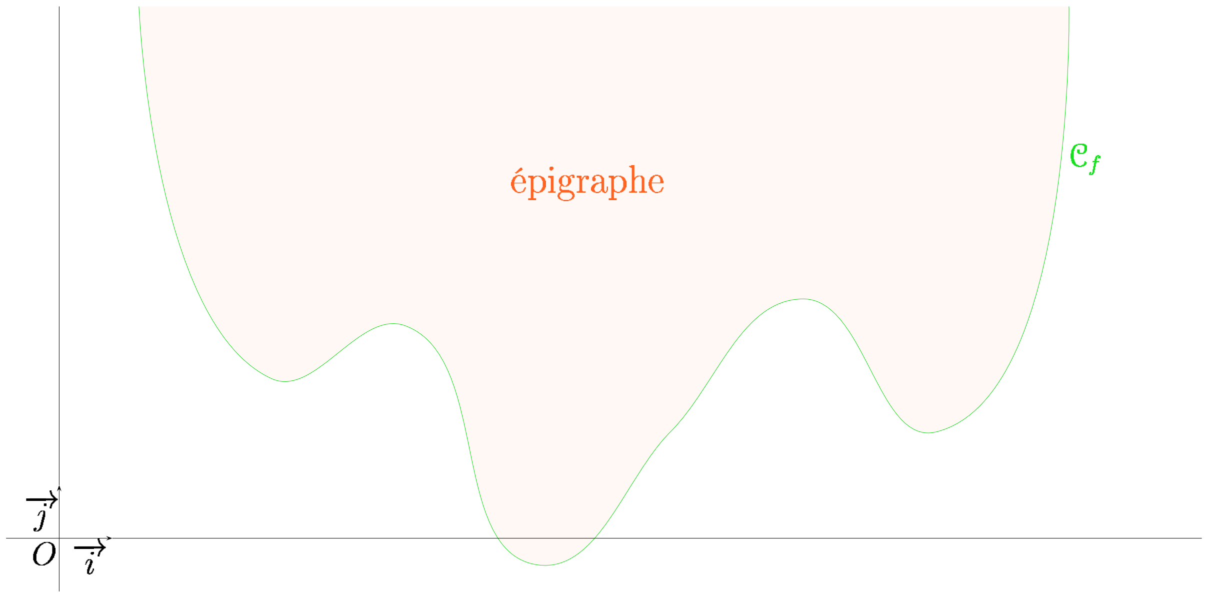
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel et $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère.

Pour tout point x de I, on note M_x le point de coordonnées $(x, f(x))$.

Un point A de coordonnées (a, b) sera dit en dessous (respectivement au dessus) de $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si $a \in I$ et $b \leq f(a)$ (respectivement $b \geq f(a)$).

Nous dirons que $\mathcal{C}_f$ est en dessous (respectivement au dessus) d'une droite d de $\mathcal{P}$ si, et seulement si pour tout x de I, les points de d d'abscisse x ont une ordonnée inférieure ou égale (respectivement supérieure ou égale) à $f(x)$.

Enfin, nous appelerons épigraphe de f l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ situés au dessus de $\mathcal{C}_f$.



✎ **Proposition 0.4.1.**
Les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) f est convexe sur I.
(ii) $\forall (x,y) \in I^2$ tel que $x < y$, tout point du segment $[M_x M_y]$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.
(iii) L'épigraphe est une partie convexe du plan $\mathcal{P}$.

Un autre point de vue est de chercher à caractériser les fonctions convexes par ses fonctions affines d'appui:

✎ **Définition 0.4.2.**
Soit $a \in I$ et h une fonction affine telle que $h(a) = f(a)$.
On dit que h est une fonction affine d'appui de f en a si, et seulement si

$$\forall x \in I, \qquad h(x) \leq f(x).$$

La droite représentative de h est alors appelée d'appui de $\mathcal{C}_f$ en M_a.

✎ **Proposition 0.4.3.**
Supposons I ouvert. Alors f est convexe sur I si, et seulement si $\mathcal{C}_f$ admet au moins une droite d'appui en chacun de ses points.

Démonstration. Si f est convexe, alors notre premier critère de convexité nous donne:

$$\forall a \in I \;\text{ et }\; \forall x \in I, \qquad f(x) \geq f(a) + (x-a)f'_d(a).$$

Soit $h(x) = f(a) + (x-a)m$ une droite d'appui en M_a. Pour $(x,y) \in I^2$ et $t \in [0,1]$, posons $a = tx + (1-t)y$. Les points M_x et M_y sont au dessus de la droite d'appui en M_a donc tout point de $[M_x M_y]$ est au dessus de cette droite d'où

$$h(a) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

∎

✎ **Proposition 0.4.4.**
Supposons f continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$. Alors, f est convexe sur I si, et seulement si la tangente à $\mathcal{C}_f$ en chacun de ses points d'abscisse dans $\mathring{I}$ est droite d'appui de $\mathcal{C}_f$ en ce point.

0.5 Inégalités de convexités.

On appelle ainsi toute inégalité qui se démontre en utilisant la convexité d'une certaine fonction.

Exemples:

◇ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x.$$

◇ $\forall x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

◇ $\forall x \in [0,\pi]$,
$$\sin x \leq x.$$
◇ $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,
$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x.$$
◇ $\forall x \in [-1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$
(inégalité de Bernoulli).

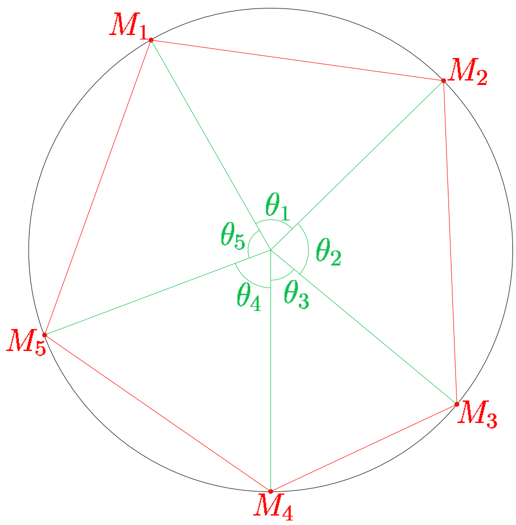
◇ Pour x, y, p et q des réels strictements positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,
$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}.$$

Proposition 0.5.1.
Si f est convexe sur I, pour toute famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de n ($n \geq 2$) points distincts de I et toute famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de n nombres réels vérifiant:
$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases},$$
on a
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. Par récurrence. ■

Exercice: Montrer qu'un polygône convexe inscrit dans un cercle a un périmètre maximal lorsque celui-ci est un polygône régulier.

Démonstration. Commençons par faire un dessin:



$M_iM_{i+1} = 2\sin\frac{\theta_i}{2}$ donc en notant P_n le périmètre:
$$P_n = \sum_{i=1}^{n} 2\sin\frac{\theta_i}{2}$$

avec $\theta_i \in]0, 2\pi[$. Or le sinus est concave sur $[0, \pi]$ donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{\theta_i}{2} \leq \sin \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i}{2n} \right) = \sin \frac{\pi}{n}$$

donc

$$P_n \leq 2n \sin \frac{\pi}{n}$$

qui est le périmètre d'un polygône régulier. ∎