Fonctions à valeurs réelles continues en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algèbriques, composition. Prolongement par continuité d'une fonction en un point. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Cadre: Les fonctions numériques à valeurs réelles.

Pré-requis: Les suites convergentes (En particulier, le critère de Cauchy).

0.1 Fonctions continues en un point.

Définition 0.1.1.
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et a un point de D.
La fonction f est dite continue en a si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

La fonction f est dite continue à droite (respectivement à gauche) en a si, et seulement si la restriction de f à $D \cap [a, +\infty[$ (respectivement $D \cap]-\infty, a]$) est continue en a.

Enfin, nous dirons que f est continue sur une partie A de D si elle est continue en tout point a de A.

Proposition 0.1.2.
La fonction f est continue en a si, et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a.

Remarques: Si a est un point isolé de D, f est continue en a.

Si a est un point isolé de $D \cap [a, +\infty[$ (respectivement $D \cap]-\infty, a]$), f est continue à droite (respectivement à gauche) en a.

0.2 Opérations algèbriques et composition.

Proposition 0.2.1.
Si f et g sont continues en a, $f+g$, λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et fg sont continues en a.
Si de plus, f ne s'annule pas sur D, $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Démonstration. – Soit $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \beta \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, alors pour $x \in D$ et $|x-a| < \gamma$ on a:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x)-f(a) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } -\frac{\varepsilon}{2} < g(x)-g(a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$-\varepsilon < (f+g)(x) - (f+g)(a) < \varepsilon.$$

- Si $\lambda = 0$, alors c'est évident on peut donc supposer $\lambda \neq 0$. Soit alors $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

d'où

$$|\lambda f(x) - \lambda f(a)| < \varepsilon.$$

- Soit $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(f(a)+g(a))^2 + 4\varepsilon} - (f(a)+g(a))\right) > 0$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \delta$$

et

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \beta \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}(f(x)-f(a))(g(x)-g(a)) &= f(x)g(x) - f(x)g(a) - g(x)f(a) + f(a)g(a)\\ &= f(x)g(x) + (f(a)-f(x))g(a) + (g(a)-g(x))f(a)\\ &\quad -f(a)g(a)\end{aligned}$$

d'où

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x)-f(a))(g(x)-g(a)) + (f(x)-f(a))g(a) + (g(x)-g(a))f(a).$$

Soit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, alors pour $x \in D$ et $|x-a| < \gamma$,

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < \delta^2 + \delta(f(a)+g(a)) = \varepsilon.$$

- Soit $|f(l)f(a)|\varepsilon > 0$ où $f(l) = \min_{x \in I}\{|f(x)|\}$ avec I un segment contenant a,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| < |f(l)f(a)|\varepsilon$$

donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)f(a)|} < \varepsilon.$$

■

Proposition 0.2.2.
Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$, Δ une partie de $\mathbb{R}$ contenant $f(D)$ et g une fonction de Δ dans $\mathbb{R}$.
Si f est continue en un point a de D et si g est continue en $f(a)$, la composée $g \circ f$ est alors continue en a.

0.3 Prolongement par continuité.

Proposition 0.3.1.
Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $\overline{D} \setminus D$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. Il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $D \cup \{x_0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ prolongeant f et continue en x_0.
2. Il existe un nombre réel L tel que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Démonstration. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Soit $\widetilde{f}$ définie sur $D \cup \{x_0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ prolongeant f et continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \cup \{x_0\} \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x_0)\right| < \varepsilon$$

ainsi pour $x \in D$ et $|x - x_0| < \alpha$, $\left|f(x) - \widetilde{f}(x_0)\right| < \varepsilon$ or $\widetilde{f}(x_0) = L$.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Il suffit de prendre

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

∎

Remarque: Lorsque ces propriétés sont satisfaites, il y a unicité du nombre L et on a nécessairement $\widetilde{f}(x_0) = L$ (ce qui prouve l'unicité du prolongement).

0.4 Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Proposition 0.4.1.
Soit f une fonction définie sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$ et a un point de D. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est continue en a.
2. L'image par f de toute suite de points de D qui converge vers a est une suite convergente dont la limite est égale à $f(a)$.
3. L'image par f de toute suite de points de D qui converge vers a est une suite convergente.

Démonstration. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Soit u une suite convergente de limite a. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

or $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \alpha \Rightarrow |f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ C'est évident.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Raisonnons par contrapposée; supposons que f est non continue et montrons qu'il existe une suite u qui converge vers l telle que $f(u)$ ne converge pas. La non continuité de f s'écrit:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, (\exists x \in D, |x - l| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - f(l)| \geq \varepsilon.$$

Discrétisons cette propriété;

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha_n > 0, (\exists x_n \in D, |x_n - l| < \alpha_n) \Rightarrow |f(x_n) - f(l)| \geq \varepsilon,$$

et prenons $\alpha_n = \frac{1}{n}$ pour caractériser une suite x_n. Afin de nier le crirtère de Cauchy, prenons la suite v définie par $v_{2n} = x_n$ et $v_{2n+1} = l$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(v_{n+1}) - f(v_n)| = |f(x_k) - f(l)| \geq \varepsilon, \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ainsi $f(v)$ n'est pas convergente.

■

Application: Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue et $c \in I$.

Si la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente, sa limite ne peut-être qu'un point fixe de f.

0.5 Exemples.

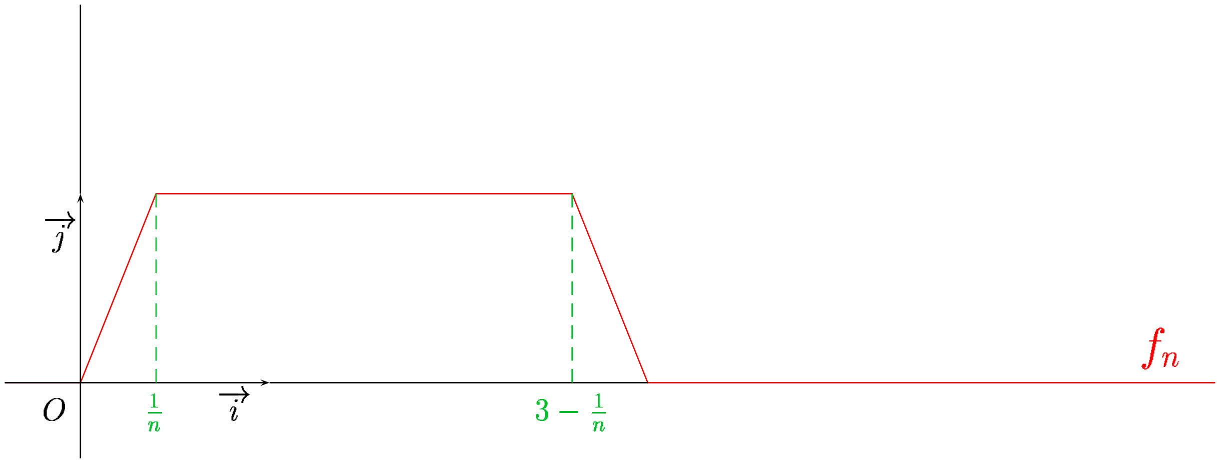
◇ Les fonctions polynômes, les fractions rationnelles sont continues sur tout domaine D où elles sont définies.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les résultats concernant les opérations algèbriques après avoir constaté de manière évidente que les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont continues sur D. ■

◇ Si f et g sont définies sur le même domaine D et sont continues en x_0, alors les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en x_0.

Démonstration. Cela résulte des opérations algèbriques et la composition après avoir remarqué que $x \mapsto |x|$ est continue sur D et que $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(|f - g| + f + g))$ et $\inf(f, g) = \sup(-f, -g)$. ■

Remarque: La propriété ne se généralise pas à une famille infinies de fonctions; il suffit de regarder les fonctions f_n définies comme suit:



Alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x)$$

qui n'est pas continue en 0 et 3.

◇ La fonction carctéristique de $\mathbb{Q}$ (définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=0$ sinon) est discontinue en tout point a de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si a est irrationnel, considérons une suite de rationnels convergent vers a (l'existence d'une telle suite repose sur le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$): son image par f est la suite nulle de limite 0 alors que $f(a)=1$.
Si a est rationnel, considérer la suite définie par $x_n = a+\frac{\sqrt{2}}{n}$ pour conclure de manière analogue. ■

◇ La fonction partie entière, notée $[\cdot]$, définie sur $\mathbb{R}$ par $[x]=n$ si $x\in[n,n+1[$, $(n\in\mathbb{Z})$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, continue à droite mais non continue à gauche en tout point a de $\mathbb{Z}$.

◇ Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right],$$

f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*\setminus\left\{\frac{1}{n} : n\in_I Z\right\}$, continue à gauche mais non à droite en tout point a de la forme $\frac{1}{n}$ si $n\in\mathbb{Z}^*$.
De plus, elle admet un prolongement par continuité en 0, prenant la valeur 1 en ce point.

◇ La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

Démonstration. Les suites de termes généraux $\frac{1}{n\pi}$ et $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ ont pour image respective la suite nulle et la suite constante égale à 1. ■

◇ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}^* \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}^* \ (p,q)=1,\, p\in\mathbb{Z}^* \text{ et } q\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}^*$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}^*$.

Démonstration. Si a est un élément de $\mathbb{Q}^*$, $f(a) \neq 0$ alors que la suite d'irrationnels $a + \frac{\sqrt{2}}{n}$, de limite a, a pour image la suite nulle; f est ainsi discontinue en a.
Si a est irrationnel ou nul, $f(a) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il est facile de vérifier qu'il n'y a qu'un nombre fini de réels x tels que $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ et $|x - a| \leq 1$. En effet, tous les irrationnels ne possède pas cette propriété puisque $\varepsilon > 0$. Si un rationnel vérifie cette propriété, alors $x = \frac{p}{q}$ implique que $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$, c'est-à-dire $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ et

$$\left|\frac{p}{q} - a\right| \leq 1 \Leftrightarrow a - 1 \leq \frac{p}{q} \leq 1 + a$$

d'où $\varepsilon(a-1) \leq p \leq 1 + a$, ce qui montre bien qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de nombres vérifiant cette propriété.
Si de tels nombres n'existent pas, on pose $\alpha = 1$, sinon on prend α la plus petite distance entre a et un de ces points, ce nombre α est alors strictement positif et pour tout x tel que $|x - a| < \alpha$ on $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. ■