Etude des suites de terme général a^n, n^α et $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaison aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Dans cet exposé, nous supposons a réel et α entier.

Pré-requis:

◇ Notions de suite convergente, divergente;
en particulier relation de domination, négligeabilité, prépondérance et équivalence.

0.1 Etude des suites de terme général a^n, n^α et $n!$.

Tout d'abord, rappelons le critère suivant:

Proposition 0.1.1.
Soit u une suite à termes strictements positifs telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit convergente de limite L.

- Si $L > 1$ alors u diverge vers $+\infty$.
- Si $L < 1$ alors u converge vers 0.

Démonstration.

- u est croissante à partir d'un certain rang et si elle était majorée, elle convergerait vers un nombre réel non nul (car les termes de la suite sont strictements positifs) de sorte que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admettrait 1 pour limite.
- u est décroissante et minorée par 0 donc convergente et si sa limite était différente de 0, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ aurait 1 pour limite.

■

Proposition 0.1.2.
La suite u de terme général a^n est monotone si $a \geq 0$, elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

- Si $a > 1$, alors u diverge vers $+\infty$.
- Si $-1 < a < 1$, alors u converge vers 0.
- Si $a < -1$, alors les suites extraites x et y définies par $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$ divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

Démonstration. Ceci résulte essentiellement du fait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n.$$

■

Exercices: Soient a et b deux réels positifs tels que $a > b$. Déterminer la limite des suites définies par:

-
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}.$$
-
$$v_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

Démonstration. On a:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \\ &= \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \\ &= a \cdot \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}. \end{aligned}$$

Or $a > b \geq 0$, donc $0 \leq \frac{b}{a} < 1$, et donc:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0,$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a.$$

On procède de la même façon pour la seconde suite. ∎

Proposition 0.1.3.
Soit v la suite de terme général n^α.
- Pour tout α entier strictement positif, v est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.
- Pour tout α entier strictement négatif, v est strictement décroissante et converge vers 0.

Démonstration.
- Soit α un entier strictement positif, la monotonie de v s'établit directement en utilisant les propriétés liant l'ordre et la multiplication sur les entiers. Sa divergence s'obtient par l'inégalité $n^\alpha \geq n$.
- Le cas α entier strictement négatif se déduit du précédent en remarquant que $n^\alpha = \frac{1}{n^{|\alpha|}}$.

∎

Proposition 0.1.4.
La suite w de terme général $n!$ est croissante et diverge vers $+\infty$.

Démonstration. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = (n+1) w_n.$$

∎

0.2 Croissances comparées.

Plaçons nous désormais dans les cas $a > 1$ et α entier naturel non nul: les suites u, v et w divergent alors en croissant vers $+\infty$.

Proposition 0.2.1.
Pour tous entiers naturels non nuls α et α' tels que $\alpha < \alpha'$, la suite de terme général n^α est négligeable devant celle de terme général $n^{\alpha'}$.

Démonstration. En effet, $\frac{n^\alpha}{n^{\alpha'}} = n^{\alpha-\alpha'}$ et $\alpha - \alpha' < 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\alpha'}} = 0.$$

■

Proposition 0.2.2.
La suite de terme général n^α est négligeable devant la suite de terme général a^n.

Démonstration. La suite t définie par $t_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$ est à termes strictement positifs à partir du rang 1 et

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{a} < 1.$$

■

Proposition 0.2.3.
Pour tous réels a et a' tels que $1 < a < a'$, la suite de terme général a^n est négligeable devant la suite de terme général a'^n.

Démonstration. La suite w définie par $w_n = \left(\frac{a}{a'}\right)^n$ converge vers 0 puisque $\frac{a}{a'} < 1$. ■

Remarque: Le résultat reste valable pour tous réels a et a' tels que $0 \leq a < a'$.

Proposition 0.2.4.
La suite de terme général a^n est négligeable devant la suite de terme général $n!$.

Démonstration. Soit t la suite définie par $t_n = \frac{a^n}{n!}$,

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 0 < 1.$$

■

Exercices:

◇ Trouver la croissance comparée des suites de terme général 10^{n^2} et 10^{2^n}.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\frac{10^{2^n}}{10^{n^2}} = 10^{2^n - n^2}$, or

$$2^n - n^2 = 2^n \left(1 - \frac{n^2}{2^n}\right)$$

qui tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$10^{n^2} = o\left(10^{2^n}\right).$$

■

◇ Déterminer le comportement asymptotique des suites de terme général:

- $$\frac{4^{n+1996} \cdot n^{1995}}{5^n}.$$

  Démonstration. Remarquons qu'on ne peut pas avoir une idée intuitive de la solution avec une calculatrice car les nombres mis en jeu sont trop grand. Or, en constatant que $n^{1995} = o(4^n)$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} 4^n \cdot n^{1995} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{1996}}{5^n} = 0,$$

  ainsi cette suite tend vers 0.
  Remarquons aussi qu'en prenant la suite $u_n = \frac{4^{n+20} n^{19}}{5^n}$, la calculatrice peut calculer quelques termes, par exemple $u_1 = 879609302221$, $u_2 \sim 3,68 \cdot 10^{17}$, $u_3 \sim 6.54 \cdot 10^{20}$, $\ldots$, $u_{50} \sim 2,99 \cdot 10^{39}$; on a l'impression que cette suite diverge, alors que pour les même raisons elle tend vers 0. ■

- $$\frac{3^n - n^2}{n^{2000} - 3^n}.$$

  Démonstration. La très grande puissance au dénominateur laisse à penser que cette suite va converger vers 0, la calculatrice ne peut pas non plus vérifier cette intuition. Néanmoins, dans ce cas l'intuition est fausse;

  $$\frac{3^n - n^2}{n^{2000} - 3^n} = \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{1 - \frac{n^2}{3^n}}{\frac{n^{2000}}{3^n} - 1},$$

  donc cette suite tend vers -1.
  Même en diminuant l'esposant 2000, par exemple, $u_n = \frac{3^n - n^2}{n^{20} - 3^n}$, la calculatrice conduit à une conjecture fausse: $u_2 \sim 4,7 \cdot 10^{-6}$, $u_3 \sim 5,1 \cdot 10^{-9}$, $\ldots$, $u_{10} \sim 5,8 \cdot 10^{-16}$. ■

0.3 Exemples de comparaisons de suites aux suites précédentes.

Exemple 1:

◇ La suite de terme général C_{2n}^n est négligeable devant celle de terme général $n!$. Rappelons que

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \qquad \text{ainsi} \qquad \mathrm{C}_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Posons $u_n = \frac{C_{2n}^n}{n!}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2(n+1)!} \cdot \frac{(n!)^3}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^3}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

◇ Elle est en revanche prépondérante devant toute suite de terme général n^α. Posons $u_n = \frac{C_{2n}^n}{n^\alpha}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)^\alpha((n+1)!)^2} \cdot \frac{n^\alpha(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\alpha \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 > 1.$$

◇ La suite de terme général C_{2n}^n est négligeable ou prépondérante devant celle de terme général a^n suivant que $a > 4$ ou $a < 4$. Posons $u_n = \frac{C_{2n}^n}{a^n}$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 a^{n+1}} \cdot \frac{a^n(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{a}.$$

Exemple 2: La suite de terme général $n!$ est négligeable devant celle de terme général n^n.

Démonstration. Puisque $2 \leq n$, $3 \leq n$, $\ldots$, $n-1 \leq n$, on a:

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}.$$

■