Emploi du calcul différentiel pour l'étude locale de la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport aux tangentes et aux sécantes.

Pré-requis:

- ⋄ Notion de continuité et de dérivabilité.
- ⋄ Notion de tangente à la courbe représentative d'une fonction.
- ⋄ Le principe de Lagrange (lien entre monotonie sur un intervalle et le signe de la fonction dérivée) déduite de l'inégalité des accroissements finis.

Cadre: Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, a un point de I et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}_f$ si besoin est) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Si $\mathcal{D}$ est une droite non parallèle à $\left(O, \vec{j}\right)$ on se propose de positionner la courbe $\mathcal{C}$ par rapport aux demi-plans délimités par $\mathcal{D}$; si $g : x \mapsto ux+v$ est la fonction affine représentative de $\mathcal{D}$, la problème se ramène à l'étude du signe de la fonction

$$\Delta : x \longmapsto f(x) - g(x).$$

Dans cette leçon on envisage deux types de droites $\mathcal{D}$:

- une tangente à $\mathcal{C}$ en l'un de ses points.
- une sécante à $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire une droite coupant $\mathcal{C}$ en au moins deux points).

0.1 Position par rapport aux tangentes.

Nous supposerons f dérivable en a. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est la droite $\mathcal{D}_a$ d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Le problème est donc d'étudier localement le signe de l'application

$$\Delta : x \in I \longmapsto f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

qui vérifie $\Delta(a) = \Delta'(a) = 0$.

0.1.1 Hypothèses de régularité d'ordre 1.

On suppose ici qu'il existe un intervalle ouvert J contenant a, tel que sur $I \cap J$ Δ soit de classe $\mathcal{C}^1$, et de dérivée nulle uniquement en a.

Sur $I \cap J$,

$$\Delta'(x) = f'(x) - f'(a).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, sur chacun des intervalles $]-\infty, a[\cap I \cap J$ et $]a, +\infty[\cap I \cap J$ la fonction Δ' garde un signe constant.

On a alors deux situations possibles:

Premier cas:

Δ' change de signe en a.

x		a	
Δ'	$-$	0	$+$
Δ	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}_a$

x		a	
Δ'	$+$	0	$-$
Δ	$\nearrow$	0	$\searrow$

$\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}_a$

Deuxième cas:

Δ' ne change pas de signe en a.

x		a	
Δ'	$+$	0	$+$
Δ	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x		a	
Δ'	$-$	0	$-$
Δ	$\searrow$	0	$\searrow$

Au point $(a, f(a))$ la courbe passe de l'un des demi-plans délimité par $\mathcal{D}_a$ à l'autre. On dit que $\mathcal{C}$ "traverse sa tangente au point $(a, f(a))$" ou que le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe.

Remarques:

- Dans le premier cas, le point a peut être une extrémité de I, par contre la notion d'inflexion n'a de sens que si a est intérieur.
- Lorsque Δ est dérivable sur I, l'existence de J n'est pas assurée:

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en prenant $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, on a $\Delta = f$ (car $f'(0) = 0$) et il est clair que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{D}_0$, mais il n'existe aucun intervalle du type $]-\varepsilon, \varepsilon[$ sur lequel 0 est la seule racine de f'.

0.1.2 Hypothèses de régularité d'ordre 2.

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a.

Premier cas:

$f''(a) \neq 0$.

Alors il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que pour tout $x \in I \cap J$ on ait, suivant que $f''(a) > 0$ ou $f''(a) < 0$:

$\text{signe}(f'(x) - f'(a)) = \text{signe}(x - a)$

x		a	
Δ'	$-$	0	$+$
Δ	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}_a$

$\text{signe}(f'(x) - f'(a)) = -\ \text{signe}(x - a)$

x		a	
Δ'	$+$	0	$-$
Δ	$\nearrow$	0	$\searrow$

$\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}_a$

Deuxième cas:

$f''(a) = 0.$

Alors il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que sur $I \cap J$ f'' existe et ne s'annule qu'en a.

Cette hypothèse est la même que l'hypothèse faite dans la première partie mais pour Δ'. On trouve alors quatres situations parmi lesquelles:

x		a	
Δ''	$+$	0	$+$
Δ'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
Δ	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}_a$

x		a	
Δ''	$+$	0	$-$
Δ'	$\nearrow$	0	$\searrow$
Δ	$\searrow$	0	$\searrow$

$(a, f(a))$ point d'inflexion.

Remarque: Si f'' existe en a, la condition $f''(a) = 0$ apparaît comme nécessaire pour l'existence d'un point d'inflexion en $(a, f(a))$.

Exemple et exercice:

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\sin x$ et les points d'abscisses $k\pi$ sont donc des points d'inflexion.
- Soit

$$f : x \in]-1, 1[\longmapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\cos^3 x}.$$

Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

0.2 Position par rapport aux sécantes.

0.2.1 Utilisation de la monotonie de la dérivée.

Soient a et b deux points distincts de I; la droite (AB) est une sécante à $\mathcal{C}$ et a pour équation:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$

L'étude de la position relative de $\mathcal{C}$ et (AB) est celle du signe de l'application

$$\Delta : x \in I \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

Si on suppose f dérivable sur $J = [a, b]$ alors d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$\forall x \in J,\ \Delta'(x) = f'(x) - f'(c).$$

Théorème 0.2.1.
Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et si f' est croissante sur I alors la courbe représentative de f est au dessous (au sens large) de toutes ses cordes.

Démonstration. $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, et f' est croissante alors si $x \leq c$ alors $f'(x) - f'(c) \leq 0$ et si $x \geq c$ alors $f'(x) - f'(c) \geq 0$ d'où le résultat. ■

Définition 0.2.2.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$.

(i) Lorsque sur I la courbe est au dessus de toutes ses cordes on dit que f est convexe sur I.

(ii) On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

Exemple: La fonction sinus est concave sur les intervalles du type $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ et convexe sur ceux de la forme $[(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$.

0.2.2 Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Théorème 0.2.3.
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) f est convexe sur I.

(ii) f' est croissante sur I.

(iii) La courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration. $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Soit $a \in I$, on note

$$\tau_a : x \in I \setminus \{a\} \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Vérifions que τ_a est croissante sur I. Envisageons par exemple le cas où $x < a < y$: on peut écrire

$$a = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \text{pour} \quad \lambda = \frac{y - a}{y - x}.$$

D'autre part, soit g la fonction affine qui coïncide avec f en x et y, on a par la convexité de f:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq g(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

et g étant affine:

$$\begin{aligned} g(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \lambda g(x)+(1-\lambda g(y) \\ &= \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

Finalement,

$$f(a) \leq \frac{y-a}{y-x}f(x)+\frac{a-x}{y-x}f(y)$$

d'où

$$(y-x)f(a) \leq (y-a)f(x)+(a-x)f(y)$$

soit encore

$$(y-a)(f(a)-f(x)) \leq (x-a)(f(a)-f(y))$$

donc

$$\tau_a(x) \leq \tau_a(y).$$

Si a et b sont deux points de I tels que $a<b$ montrons que $f'(a) \leq f'(b)$.

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \text{ et } x<b, \quad \tau_a(x) \leq \tau_a(b)$$

donc

$$\lim_{x \to a} \tau_a(x) \leq \tau_a(b),$$

c'est-à-dire

$$f'(a) \leq \tau_a(b).$$

On montre de même que $\tau_b(a) \leq f'(b)$ or $\tau_b(a)=\tau_a(b)$ d'où la conclusion.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Soit (a,b) un couple de points distincts de I. De par l'hypothèse:

$$f(b) \geq f(a)+f'(a)(b-a)$$

et

$$f(a) \geq f(b)+f'(b)(a-b).$$

En ajoutant membre à membre ces deux inégalités on obtient:

$$(f'(b)-f'(a))(b-a) \geq 0,$$

d'où la croissance de f' sur I.

■