Développements limités, opérations sur les développements limités.

Pré-requis principaux:
- ◇ Notion de fonction polynôme.
- ◇ Notion de continuité et de dérivabilité en un point pour une fonction numérique à valeurs réelles.
- ◇ Formule de Taylor-Young.

0.1 Développements limités - généralités.

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, I un intervalle non vide et non réduit à un point et $a \in I$.

On sait que la dérivabilité de f en a est équivalente à l'existence d'une fonction affine $P : x \mapsto \alpha x + \beta$ et d'une fonction ε définie sur E, telles que:

$$\forall x \in E,\ f(x) = P(x) + (x-a)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_a \varepsilon = 0$.

Cette présentation fait apparaître la fonction affine P comme une approximation de f, au sens où l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $P(x)$ est négligeable devant $x - a$.

La notion de développement limité généralise cette constatation.

Définition 0.1.1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n. L'application f admet P comme développement limité d'ordre n en a s'il existe une fonction ε définie sur E telle que:

$$(1)\begin{cases} \forall x \in E,\ f(x) = P(x) + (x-a)^n\varepsilon(x) \\ \lim\limits_a \varepsilon = 0 \end{cases}.$$

Propriété 0.1.2.
L'application f admet P comme DL (développement limité) en a si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$(2)\begin{cases} f(a) = P(a) \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \end{cases}.$$

Démonstration. La condition nécessaire est immédiate.

Si l'on a (2), la fonction ε définie par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} & \text{si } x \in E \setminus \{a\} \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

donne (1). ■

Exemples et contre-exemples:

◇ Tout polynôme P de degré d admet P comme DL d'ordre $n \geq d$, en tout point a.

Démonstration. Il suffit de prendre pour ε la fonction identiquement nulle.

◇ Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le polynôme nul est un DL de f au point 0 à l'ordre 2, car pour tout x:

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x)$$

avec

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

mais f est non dérivable à l'ordre 2 en 0. ■

Théorème 0.1.3.

Si f admet un DL d'ordre n au point a alors celui-ci est unique.

Démonstration. Soient P et Q deux DL d'ordre n au point a pour l'application f. Alors,

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0;$$

il en est donc de même pour $\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^p}$ pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$ car

$$\frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^p} = \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^n} \cdot (x-a)^{n-p}.$$

Pour tout réel x, posons

$$P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

or $P(x) - Q(x) \longrightarrow 0$ quand $x \to a$ donc $a_0 = 0$, $\frac{P(x)-Q(x)}{x-a} \longrightarrow 0$ quand $x \to a$ donc $a_1 = 0$. De proche en proche, on obtient $a_p = 0$ pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, d'où $P = Q$. ■

Corollaire 0.1.4.

Si f est paire (respectivement impaire) et si f admet un DL d'ordre n en 0 alors ce DL est un polynôme pair (respectivement impair).

Démonstration.

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),$$
$$f(-x) = P(-x) + x^n (-1)^n \varepsilon(-x)$$

d'où

$$P(x) = P(-x) + \underbrace{\left((-1)^n \varepsilon(-x) - \varepsilon(x)\right)}_{\longrightarrow 0 \text{ quand } x \to 0} x^n.$$

■

0.2 Obtention de développements limités.

0.2.1 Par la formule de Taylor-Young.

Rappels: Si f est dérivable à l'ordre n au point a alors f admet le polynôme

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

comme DL d'ordre n en a.

Exemples:

◇
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x).$$

◇
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x).$$

◇
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x).$$

Remarque: La formule de Taylor-Young ne permet pas d'obtenir tous les DL, tout d'abord le calcul des dérivées successives en a n'est pas souvent aisé (exemple de la fonction tangente).

De plus, on peut avoir un DL d'ordre 2 sans pour autant avoir l'existence des dérivées successives $f^{(p)}(a)$ pour $p \in [\![2, n]\!]$.

0.2.2 Opérations sur les développements limités.

Les hypothèses sur les fonctions considérées sont les même qu'au début.

✎ **Propriété 0.2.1.**
L'application f admet un DL d'ordre n en a si, et seulement si l'application $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un DL d'ordre n en 0.

Démonstration. L'application g est définie sur $E - a = \{x - a : x \in E\}$ et le translaté d'un intervalle reste un intervalle, on reste donc dans nos hypothèses.

Si g admet un DL d'ordre n en 0, alors pour tout $h \in E - a$,

$$f(a+h) = Q(h) + h^n\theta(h)$$

où Q est un polynôme défini par $Q(h) = P(a+h)$ et $\theta(h) = \varepsilon(a+h)$ qui tend vers 0 avec h et donc quand $a+h$ tend vers a. ■

Remarque: Afin d'alléger l'écriture, on peut maintenant se restreindre à 0.

Notation: Si P est le polynôme $x \mapsto a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, alors pour tout $m \leq n$, nous noterons $T_m(P)$ le polynôme $x \mapsto a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$.

Proposition 0.2.2.
Si P est un DL d'ordre n en 0 de f alors, pour tout $m \leq n$, $T_m(P)$ est un DL d'ordre m en 0 de f.

Démonstration. Si $m = n$, le résultat est clair.
Sinon cela résulte de l'unicité et de

$$f(x) = T_m(P)(x) + x^m \left(a_{m+1}x + a_{m+2}x^2 + \ldots + a_n x^{n-m} + x^{n-m}\varepsilon(x)\right).$$

■

Conséquence: Le DL à l'ordre m d'un polynôme P de degré $d \geq m$ est $T_m(P)$.

Proposition 0.2.3.
(DL d'une somme et d'un produit)
Si P et Q sont respectivement les DL d'ordre n en 0 de f et g alors:
(i) $P + Q$ est le DL d'ordre n en 0 de $f + g$.
(ii) $T_n(PQ)$ est le DL d'ordre n en 0 de fg.
(iii) Pour tout réel λ, λP est le DL d'ordre n en 0 de λf.

Démonstration. Montrons (ii): Avec des notations évidentes, $\forall x \in E$,

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

et $\forall x \in F$,

$$g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x).$$

Ainsi, $\forall x \in E \cap F$,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= P(x)Q(x) + x^n\left(P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right) \\ &= T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\theta(x) \end{aligned}$$

où R est un polynôme et $\theta(x) = P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. Donc

$$f(x)g(x) = T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + \theta(x)).$$

■

Proposition 0.2.4.
(DL d'une fonction composée)
On suppose f définie sur un intervalle I contenant 0 et non réduit à ce seul point et g définie sur un intervalle J contenant 0 et non réduit à un point et tel que $F(I) \subseteq J$

Si f et g admettent P et Q comme DL à l'ordre n en 0 et si $f(0) = 0$ alors $g \circ f$ admet $T_n(Q \circ P)$ comme DL d'ordre n en 0.

Démonstration. Si $n = 0$, c'est un cas particulier du théorème de composition des fonctions continues.

Si $n \geq 1$, posons

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \text{ et } P(x) = xP_1(x)$$

où P_1 est un polynôme de degré au plus $n-1$ (car $f(0)=P(0)=0$).

Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = x\left(P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)\right), \quad \text{où } \lim_0 \varepsilon_1 = 0.$$

et

$$g(f(x)) = Q(f(x)) + x^n \varepsilon_3(x)$$

où

$$\varepsilon_3(x) = (P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x))^n \varepsilon_2(f(x))$$

qui tend vers 0 avec x car $f(0)=0$.

D'autre part, comme P est le DL d'ordre n de f, pour tout $k \geq 1$, $T_n(P^k)$ est celui de f^k donc a fortiori,

$$f^k(x) - P^k(x) = o(x^n)$$

d'où pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$,

$$b_k f^k(x) - b_k P^k(x) = o(x^n),$$

ainsi en sommant k de 0 à n,

$$Q(f(x)) - Q(P(x)) = o(x^n)$$

ainsi

$$g(f(x)) = (Q \circ P)(x) + o(x^n)$$

et on peut conclure. ■

Conséquence: DL d'un quotient. Si g admet un DL d'ordre n en 0 et si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est définie sur un intervalle contenant 0 et non réduit à ce seule point.

Soit alors h l'application définie par

$$g(x) = g(0)(1 - h(x));$$

il est clair que h admet un *DL* d'ordre n en 0, la fonction

$$\frac{1}{g} : x \longmapsto \frac{1}{g(0)} \cdot \frac{1}{1-h(x)}$$

admet un DL d'ordre n en 0 obtenu par composition avec celui de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.

0.3 Exemples.

0.3.1 DL de la fonction tangente en 0.

Ici nous prendrons $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et recherchons ce DL à l'ordre 6.

On écrit:

$$\tan x = \frac{\sin x}{1 - (1 - \cos x)}$$

or

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon_1(x)$$

et

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^6\varepsilon_2(x),$$

d'où

$$\frac{1}{1-(1-\cos x)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + x^6\varepsilon_3(x)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \tan x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) + x^6\varepsilon(x) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6\varepsilon(x) \end{aligned}$$

0.3.2 Calculs élémentaires de limites.

Exemple: Soit

$$f : x \in]-1,1[\longmapsto \frac{1+\ln(1+x)-\sin x - \cos x}{\tan x - x}$$

Chercher $\lim_0 f$?

0.3.3 Etude locale d'une fonction.

Soit

$$f : x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\longmapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0; ce prolongement est-il dérivable en 0? Position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0?