Dérivée en un point. Interprétation géométrique de ce nombre. Exemples.

Cadre: Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pré-requis: Notion de limite en un point d'une fonction de la variable réelle à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

0.1 Dérivée en un point.

Théorème 0.1.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, f une application de I dans $\mathbb{K}$ et a un point de I. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. Il existe $L \in \mathbb{K}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$, de limite nulle en a telle que
$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x).$$
2. La fonction $\varphi : I \setminus \{a\} \to \mathbb{K}$ définie par:
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
admet une limite en a.

On dit alors que f est dérivable en a si, et seulement si elle vérifie ces propriétés et alors le nombre L qui apparaît en 1. et qui est aussi la limite de φ en a est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$ et la fonction affine t de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ est appelée la fonction affine tangente à f en a.

Remarque: Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f est dérivable en a si, et seulement si les fonctions numériques $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en a.

Définition 0.1.2.

Lorsque a n'est pas la borne supérieure (respectivement la borne inférieure) de I, on dit que f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a si, et seulement si la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ (respectivement $I \cap]-\infty, a]$) est dérivable en a et la dérivée de cette restriction en a est appelée dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en a, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).

Propriété 0.1.3.

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ (où $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de I), f est dérivable en a si, et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite de a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarques:

- La propriété 1. indique clairement que la dérivabilité de f en a. Plus précisément, si f est dérivable à droite et à gauche en a, elle est continue en a.

◇ La réciproque est évidemment fausse: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en 0 mais non dérivable en 0.

◇ La dérivabilité en un point n'implique pas la continuité au voisinage de ce point: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

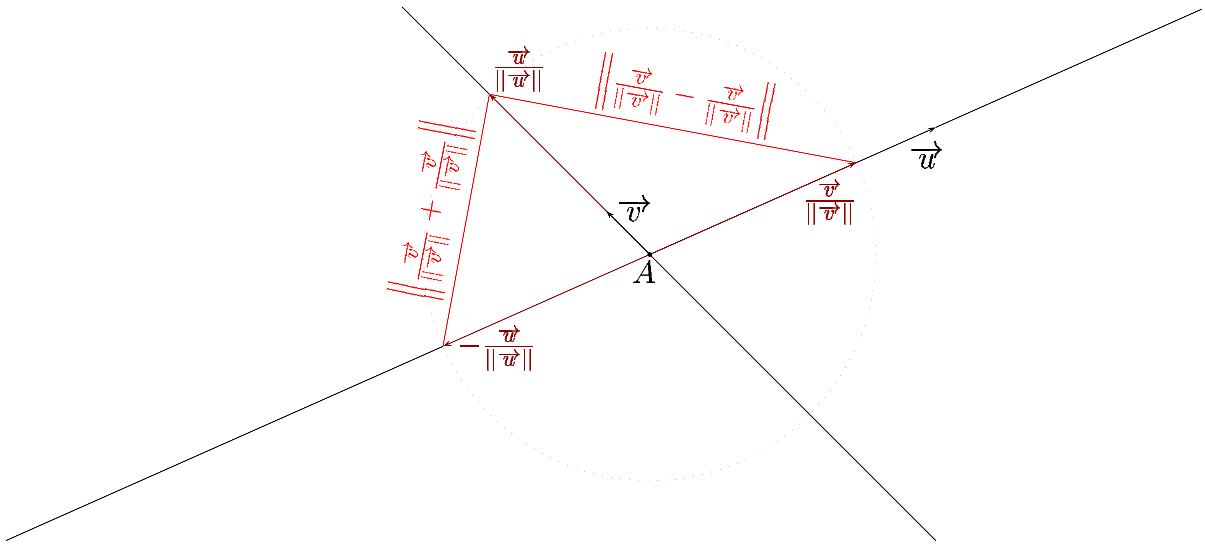
est dérivable en 0 et n'est continue qu'en 0.

0.2 Interprétation géométrique.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé de ce plan.

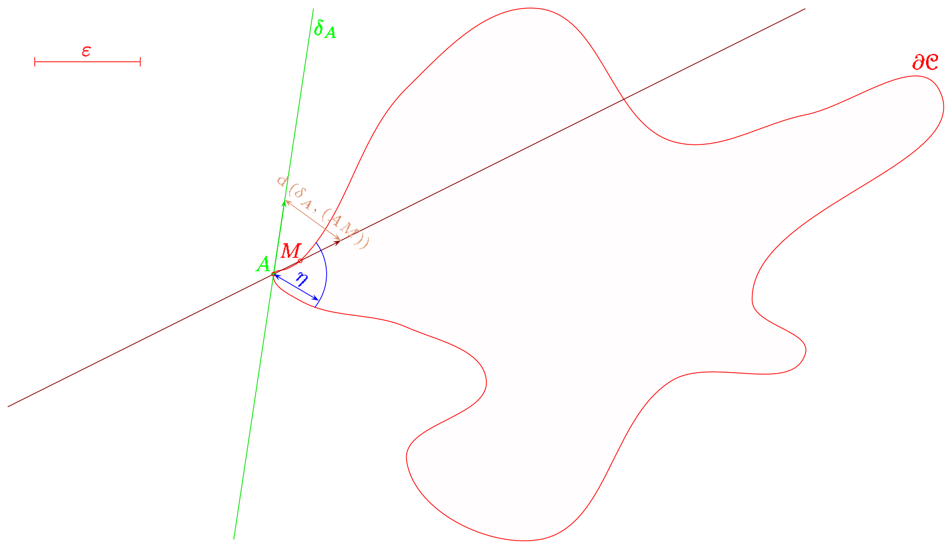
Si A est un point de $\mathcal{P}$, nous introduisons une distance sur le faisceau de droites passant par A en posant:

$$\mathrm{d}\left((A, \overrightarrow{u}), (A, \overrightarrow{v})\right) = \min\left\{\left\|\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} - \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\|, \left\|\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} + \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\|\right\}.$$



Définition 0.2.1.
Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}$ non vide et non réduite à un point, et A un point de l'ensemble $\partial\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \setminus \mathring{\mathcal{C}}$ (la frontière de $\mathcal{C}$) qui soit non isolé dans $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire: tout disque ouvert de centre A contienne au moin un point de $\mathcal{C}$ distinct de A) et δ_A une droite passant par A.
On dit que $\mathcal{C}$ admet δ_A pour tangente géométrique en A si, et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ tel que } M \in \partial\mathcal{C},\ M \neq A,\ AM < \eta \Rightarrow \mathrm{d}\left(\delta_A, (AM)\right) < \varepsilon.$$



Propriété 0.2.2.
$\mathcal{C}$ admet au plus une tangente en A.

Démonstration. Ceci résulte de l'inégalité triangulaire vérifiée par d. ■

Remarque: Pour $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan, dire que $\mathcal{C}$ admet $(A, \overrightarrow{u})$ pour tangente géométrique en A revient à dire que l'application numérique $F_{\overrightarrow{u}}$ définie sur $\mathcal{C} \setminus A$ par

$$f_{\overrightarrow{u}}(M) = \mathrm{d}\left(\left(A, \overrightarrow{u}\right), (AM)\right)$$

admet 0 pour limite quand M tend vers A en restant dans $\mathcal{C}$.

Théorème 0.2.3.

Supposons que $\mathcal{C}$ soit homéomorphe à un intervalle I de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe $\theta : I \to \mathcal{C}$ bijective continue et de réciproque continue).
Posons $a = \theta^{-1}(A)$. On a alors

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \neq a}} \theta(t) = \theta(a) = A$$

et

$$\lim_{\substack{M \to A \\ M \neq A}} \theta^{-1}(M) = \theta^{-1}(A) = a.$$

De sorte que, pour $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, il y a équivalence entre le fait que $\mathcal{C}$ admette la droite $((A, \overrightarrow{u})$ pour tangente géométrique en A et le fait que:

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \neq a}} F_{\overrightarrow{u}}\left(\theta(t)\right) = 0.$$

Démonstration. Cela résulte directement du théorème de composition des limites. ■

Remarque: Dans ce cas de figure, aucun point A appartenant à $\mathcal{C}$ n'est isolé, puisqu'aucun réel a de I n'est un point isolé de I.

0.2.1 Cas d'une fonction numérique.

Proposition 0.2.4.
Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, $a \in I$, $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ($\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont de la forme $(x, f(x))$ avec x dans I) et A le point de coordonnées $(a, f(a))$. Dans ces conditions A n'est pas un point isolé de $\mathcal{C}_f$ et:

1. f est dérivable en a si, et seulement si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente géométrique en A non dirigée par $\overrightarrow{j}$ et cette tangente géométrique en A est alors la droite représentative de la fonction affine tangente à f en a.
2. $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\left(A, \overrightarrow{j}\right)$ pour tangente géométrique en A si, et seulement si
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} |\varphi(x)| = +\infty$$
où φ est définie dans la première partie.

Démonstration. Soit
$$\begin{array}{rccc} \theta: & I & \longrightarrow & \mathcal{C}_f \\ & x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$
Elle est clairement continue et injective, c'est donc une bijection de I sur $\mathcal{C}_f$, son application réciproque est l'application qui à tout point M de $\mathcal{C}_f$ associe l'abscisse de M qui est aussi continue. Ainsi θ est un homéomorphisme de I sur $\mathcal{C}_f$.

Si $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}$ est un vecteur non nul,
$$F_{\overrightarrow{u}}(\theta(x)) = \mathrm{d}\left((A, \overrightarrow{u}), (AM)\right) \text{ où } M \in \mathcal{C}_f.$$
De plus, un vecteur directeur de (AM) est $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \varphi(x)\overrightarrow{j}$, ainsi
$$F_{\overrightarrow{u}}(\theta(x)) = \min\left\{A_{\overrightarrow{u}}(x), B_{\overrightarrow{u}}(x)\right\}$$
avec
$$\begin{aligned} A_{\overrightarrow{u}}(x) &= \left\| \frac{\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{\overrightarrow{i} + \varphi(x)\overrightarrow{j}}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}} \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\right)^2} \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} B_{\overrightarrow{u}}(x) &= \left\| \frac{\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\overrightarrow{i} + \varphi(x)\overrightarrow{j}}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}} \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\right)^2} \end{aligned}$$

Supposons que f est dérivable en a et posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + f'(a)\overrightarrow{j}$. Puisque

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \varphi(x) = f'(a)$$

alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} F_{\overrightarrow{u}}(\theta(t)) = 0$$

ce qui prouve que $\mathcal{C}_f$ admet $(A, \overrightarrow{u})$ pour tangente géométrique en A.

Inversement, supposons que $\mathcal{C}_f$ admette une tangente géométrique en A, non dirigée par $\overrightarrow{j}$ Il existe donc un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de cette tangente de la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$.

Remarquons que

$$B_{\overrightarrow{u}}(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} F_{\overrightarrow{u}}(\theta(x)) = 0$$

donc pour x assez proche de a, $F_{\overrightarrow{u}}(\theta(x)) = A_{\overrightarrow{u}}(x)$ d'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} A_{\overrightarrow{u}}(x) = 0,$$

ainsi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

par passage à la limite sur le quotient on obtient

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \varphi(x) = \beta.$$

Supposons maintenant que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} |\varphi(x)| = +\infty.$$

Il suffit de remarquer que pour tout $x \neq a$, on a

$$0 \leq F_{\overrightarrow{j}}(\theta(x)) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}\right)^2} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0$$

pour conclure que $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\left(A, \overrightarrow{j}\right)$ pour tangente géométrique en A.

Inversement, supposons que $\mathcal{C}_f$ admette la droite $\left(A, \overrightarrow{j}\right)$ pour tangente géométrique en A. Alors,

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1\varphi(x)^2}} \leq F_{\overrightarrow{j}}(\theta(x))$$

donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} |\varphi(x)| = +\infty.$$

■

0.2.2 Cas d'une fonctionde la variable réelle, à valeurs complexes.

Proposition 0.2.5.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue, $a \in I$, x et y les fonctions définies par $x = \operatorname{Re} f$ et $y = \operatorname{Im} f$, $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f relativement au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ($\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont de la forme $(x(t), y(t))$ avec $t \in I$) et A le point de coordonnées $(x(a), y(a))$. On suppose que f est injective et que I est un segment. Dans ces conditions, si f est dérivable en a et si $f'(a)$ n'est pas nul, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en A une tangente géométrique qui n'est autre que la droite représentative de la fonction affine tangente à f en a.