Croissance comparée des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications.

Pré-requis:

- ◇ Connaissance des fonctions citées dans le titre (définition, sens de variation, limites aux bornes de l'intervalle de définition).
- ◇ Opérations élémentaires sur les limites, en particulier le théorème de composition des limites: Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$, où D et E sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $f(D) \subseteq E$. Soit $(a, l, L) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ avec $a \in \overline{D}$.

$$\text{Si } l = \lim_a f \text{ et } L = \lim_l g, \text{ alors } \lim_a g \circ f = L.$$

Lorsque $a > 0$, les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ sont croissantes sur $]0, +\infty[$ et leur limite en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

Dans cette leçon, nous allons rechercher une "hierarchie" dans cette croissance vers $+\infty$. Pour nous y aider voici:

0.1 La relation de prépondérance.

Considérons des fonctions à valeurs réelles définies sur une même partie A de $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur cette partie; nous noterons $\mathcal{F}(A)$ leur ensemble.

Définition 0.1.1.

Si x_0 est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A, et si (f, g) est un couple de $\mathcal{F}(A)$, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 (ou que g est prépondérante sur f) si

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0.$$

Notation: Pour des raisons de commodité, nous utiliserons la notation de *Hardy*:

$$f \ll g \quad (\text{en } x_0).$$

Propriété 0.1.2.

Sur $\mathcal{F}(A)$, et à x_0 fixé, on a:

(i) La relation $\ll$ est transitive.

(ii) La relation $\mathcal{P}$ définie par $f\mathcal{P}g$ si $f = g$ ou $f \ll g$ est une relation d'ordre.

0.2 Croissance comparée des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles.

Nous allons utiliser la relation de prépondérance pour répondre à la question posée en introduction. Par abus de langage, nous écrirons $f(x) \ll g(x)$ au lieu de $f \ll g$.

0.2.1 Fonctions logarithmes et puissances.

Théorème 0.2.1.
Pour tout réel a strictement positif,

$$\ln x \ll x^a \quad \text{en} + \infty.$$

Démonstration. En regardant les variations de $x \mapsto \ln x - x$, on obtient que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln u < u.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln x^{\frac{a}{2}} < x^{\frac{a}{2}}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{lnx}{x^a} < \frac{2}{a} x^{-\frac{a}{2}}.$$

d'où pour tout $x > 1$,

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{2}{a} x^{-\frac{a}{2}}.$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{a} x^{-\frac{a}{2}} = 0$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 0.2.2.
Pour tout réel a strictement positif et tout réel b:

(i)

$$(\ln x)^b \ll x^a \qquad \text{en } +\infty.$$

(ii)

$$|\ln x|^b \ll x^{-a} \qquad \text{en } 0.$$

Démonstration. Pour (i), on travaille sur $]1, +\infty[$; le résultat est immédiat si $b = 0$ ou si $b < 0$.

Lorsque $b > 0$, on écrit alors:

$$\frac{(\ln x)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}} \right)^b$$

et en utilisant le résultat précédent et le théorème de composition des limites on obtient le résultat.

Pour (ii), on travaille sur $]0, 1[$; on écrit,

$$\frac{|\ln x|^b}{x^{-a}} = \frac{(-\ln x)^b}{x^{-a}} = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^b}{\left(\frac{1}{x}\right)^a}$$

et on conclut par le théorème de composition des limites. ■

0.2.2 Fonctions puissances et exponentielles.

✎ **Théorème 0.2.3.**
Pour tout réel a:

$$x^a \ll e^x \qquad \text{en } +\infty.$$

Démonstration. C'est immédiat pour $a \leq 0$. Lorsque $a > 0$, on écrit:

$$\frac{x^a}{e^x} = \exp(a \ln x - x) = \exp\left(x\left(a\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right).$$

■

✎ **Corollaire 0.2.4.**
Pour tout réel a et tout réel b strictement positif, on a:

(i)
$$x^a \ll e^{bx} \qquad \text{en } +\infty.$$

(ii)
$$e^{bx} \ll |x|^a \qquad \text{en } -\infty.$$

Démonstration. Pour (i), on écrit

$$\frac{x^a}{e^{bx}} = \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{e^x}\right)^b$$

et on conclut à l'aide du résultat précédent et du théorème de composition des limites.

Pour (ii), on écrit pour $x \in]-\infty, 0[$,

$$\frac{e^{bx}}{|x|^a} = \frac{(-x)^{-a}}{e^{b(-x)}}$$

et on applique (i). ■

En résumé, pour tout triplet (a, b, c) de réels strictement positifs, les fonctions $x \mapsto (\ln x)^b$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto e^{cx}$ sont croissantes sur $]0, +\infty[$ et tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, avec:

$$(\ln x^b \ll x^a \ll e^{cx} \qquad \text{en } +\infty.$$

0.3 Quelques applications.

0.3.1 Branches infinies des courbes des fonctions ln et exp.

✎ **Propriété 0.3.1.**
Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ les courbes représentatives des fonctions ln et exp admettent des branches paraboliques de directions respectives $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$.

Démonstration. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

■

0.3.2 Détermination de limites.

1. Déterminer:

   ◇
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x.$$

   ◇
   $$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{(\ln x)^{-\alpha}} \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

2. On considère la fonction définie sur $[0, 1]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   Etudier sa dérivabilité en 0 et en 1.

   Démonstration.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\ln x} = 0$$

   d'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$

   et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty$$

   d'où

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$

   Donc f est continue sur $[0, 1]$, de plus elle est dérivable sur $]0, 1[$ avec:

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

   Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = -\infty,$$

   donc f est non dérivable en 0.

Puisque,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty$$

alors,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-1}{(\ln x)^2}\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

d'où

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = 0,$$

elle est donc dérivable à gauche en 1. ■

0.3.3 Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non analytique.

Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Prouver que pour tout $x \neq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

où P_n est une fonction polynôme. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$.

0.3.4 Une intégrale convergente.

Considérons l'intégrale (dépendant de x):

$$\varphi(h) := \int_1^h t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Prouver que φ admet une limite finie en $+\infty$.
Démonstration. Pour tout réel x fixé, on a:

$$t^{x-1} e^{-t} \ll \frac{1}{t^2} \qquad \text{en } +\infty.$$

On en déduit qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout $h > A$ on ait

$$0 \leq \varphi(h) \leq \int_A^h t^{x-1} e^{-t}\, dt \leq \int_A^h \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{h} + \frac{1}{A} \leq \frac{1}{A}.$$

Donc φ est uniformément bornée, d'où le résultat. ■