# Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

**Pré-requis:**

◇ Les notions de groupes, d'anneaux, de corps.
◇ L'anneau $\mathbb{Z}$.
◇ Définition d'un ensemble quotienté par une relation d'équivalence.

**Cadre:**

**Introduction:** La recherche de partages équitables est à l'origine de l'introduction des nombres rationnels. En effet, chez les Pythagoriciens, le partage équitable est une des conditions pour parvenir à la paix et à l'harmonie sociale. Voici un exemple:

Dans un hameaux, cinq familles récoltent 100 quintaux de blé. Ils partagent cette récolte entre eux cinq: quelle sera leure part individuelle?

Se problème ce ramène à l'équation:

$$5x = 100.$$

Ce problème possède bien une solution dans $\mathbb{Z}$, mais que ce passe-t-il si les familles ne récoltent que 99 quintaux?

La difficulté provient du fait que l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. On va donc chercher un corps commutatif, que l'on notera $\mathbb{Q}$ contenant l'anneau $\mathbb{Z}$, qui soit le plus petit possible, dont on imposera que les lois de $\mathbb{Q}$ prolongent celles de $\mathbb{Z}$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ seront alors inversibles dans $\mathbb{Q}$.

## 0.1 Analyse du problème.

Supposons que le problème d'existence d'un tel corps $\mathbb{Q}$ soit résolu.

**Théorème 0.1.1.**
Tout élément de $\mathbb{Q}$ est le produit d'un élément $p$ de $\mathbb{Z}$ par l'inverse d'un élément non nul $q$ de $\mathbb{Z}$.

*Démonstration.* Soit $E = \{pq^{-1} | (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$.

On a clairement $E \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z} \subset E$.

Vérifions que $E$ est un sous corps de $\mathbb{Q}$. Soient $pq^{-1}$ et $p'q'^{-1}$ deux éléments de $E$. Tout d'abord, $1 = pp^{-1} \in E$.

Les règles de calculs dans $\mathbb{Q}$ donnent:

$$\begin{aligned} pq^{-1} - p'q'^{-1} &= pq^{-1}q'q'^{-1} - p'q'^{-1}qq^{-1} \\ &= pq'q^{-1}q'^{-1} - p'qq^{-1}q'^{-1} \qquad (\mathbb{Q} \text{ étant commutatif}) \\ &= (pq' - p'q)q^{-1}q'^{-1} \qquad (\text{par distributivité}) \\ &= (pq' - p'q)(qq')^{-1} \in E, \end{aligned}$$

et

$$pq^{-1}p'q'^{-1} = pp'(qq')^{-1} \in E.$$

Ainsi, $E$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, de plus, $pq^{-1}qp^{-1} = 1$ donc $E$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$, mais $\mathbb{Q}$ étant le plus petit, cela signifie que $E = \mathbb{Q}$. ■

**Notation:** Le produit $pq^{-1}$ sera noté $\frac{p}{q}$.

**Propriété 0.1.2.**
Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \text{si, et seulement si} \quad pq' = p'q.$$

*Démonstration.* C'est une évidence. ■

## 0.2 Synthèse du problème.

### 0.2.1 Définition.

Nous venons de voir que si $\mathbb{Q}$ existe, alors il vérifie nécéssairement la propriété 0.1.2., ce qui nous conduit à considérer le théorème suivant:

**Théorème 0.2.1.**
Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. La relation $\mathcal{R}$ définie par:

$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \quad \text{si, et seulement si } pq' = p'q$$

est une relation d'équivalence.

*Démonstration.* Soient $(p, q)$, $(p', q')$ et $(p'', q'')$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

- ◇ Réflexivité:

$$(p, q)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow pq = pq.$$

- ◇ Symétrie:

$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q \Leftrightarrow p'q = pq' \Leftrightarrow (p', q')\mathcal{R}(p, q).$$

- ◇ Transitivité:

$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$

  et

$$(p', q')\mathcal{R}(p'', q'') \Leftrightarrow p'q'' = p''q',$$

  ainsi

$$pq'q'' = p'qq'' \quad \text{et} \quad p'q''q = p''q'q$$

  d'où $pq'q'' = p''q'q$ c'est-à-dire $pq'' = p''q'$ ce qui implique que

$$(p, q)\mathcal{R}(p'', q'').$$

■

**Définition 0.2.2.**
L'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$ sera appelé l'ensemble des rationnels que l'on notera $\mathbb{Q}$.

### 0.2.2 L'addition et la multiplication des nombres rationnels.

Les règles de calculs trouvées dans la première partie nous invite à donner la définition suivante:

**Définition 0.2.3.**
On muni $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ des deux lois suivantes:
Pour $(p, q)$ et $(p', q')$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,
L'addition dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$(p, q) + (p', q') = (pq' + p'q, qq').$$

La multiplication dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$(p, q) \cdot (p', q') = (pp', qq').$$

**Proposition 0.2.4.**
La relation $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, c'est-à-dire:
Soient $(p_1, q_1)$, $(p_2, q_2)$, $(p_3, q_3)$, $(p_4, q_4)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$$\text{Si} \quad \begin{cases} (p_1, q_1)\mathcal{R}(p_2, q_2) \\ (p_3, q_3)\mathcal{R}(p_4, q_4) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} (p_1, q_1) + (p_3, q_3)\mathcal{R}(p_2, q_2) + (p_4, q_4) \\ (p_1, q_1) \cdot (p_3, q_3)\mathcal{R}(p_2, q_2) \cdot (p_4, q_4) \end{cases}$$

*Démonstration.* Rappelons que,

$$\begin{aligned} (p_1, q_1)\mathcal{R}(p_2, q_2) \quad &\Leftrightarrow \quad p_1q_2 = q_1p_2, \\ (p_3, q_3)\mathcal{R}(p_4, q_4) \quad &\Leftrightarrow \quad p_3q_4 = q_3p_4. \end{aligned}$$

De plus,

$$(p_1, q_1) + (p_3, q_3) = (p_1q_3 + q_1p_3, q_1q_3) \quad \text{et } (p_2, q_2) + (p_4, q_4) = (p_2q_4 + q_2p_4, q_2q_4).$$

Or,

$$(p_1q_3 + q_1p_3)(q_2q_4) = p_1q_2q_3q_4 + p_3q_1q_2q_4$$

et

$$\begin{aligned} (p_2q_4 + q_2p_4)(q_1q_3) &= p_2q_1q_3q_4 + p_4q_3q_1q_2 \\ &= p_1q_2q_3q_4 + p_3q_1q_2q_3 \end{aligned}$$

donc

$$(p_1, q_1) + (p_3, q_3)\mathcal{R}(p_2, q_2) + (p_4, q_4).$$

$$(p_1, q_1) \cdot (p_3, q_3) = (p_1p_3, q_1q_3) \quad \text{et } (p_2, q_2) \cdot (p_4, q_4) = (p_2p_4, q_2q_4),$$

or

$$p_1p_3q_2q_4 = q_1p_2q_3p_4 = p_2p_4q_1q_3,$$

donc

$$(p_1, q_1) \cdot (p_3, q_3)\mathcal{R}(p_2, q_2) \cdot (p_4, q_4).$$

■

**Notation:** Pour $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on note $\overline{(p,q)} := \{(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (p',q')\mathcal{R}(p,q)\}$, la classe d'équivalence de $(p,q)$.

**Proposition 0.2.5.**
On peut définir sur $\mathbb{Q}$ une addition et une multiplication de la façon suivante:
$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2, \exists ((p_1,q_1),(p_2,q_2)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)^2$ tel que $x_1 = \overline{(p_1,q_1)}$ et $x_2 = \overline{(p_2,q_2)}$, on pose alors

$$x_1 + x_2 = \overline{(p_1,q_1)} + \overline{(p_2,q_2)} := \overline{(p_1,q_1) + (p_2,q_2)}$$

et

$$x_1 x_2 = \overline{(p_1,q_1)} \cdot \overline{(p_2,q_2)} := \overline{(p_1,q_1) \cdot (p_2,q_2)}.$$

*Démonstration.* Montrons que ces deux opérations sont bien définies: prenons $(p'_1,q'_1)$ et $(p'_2,q'_2)$ vérifiant, $x_1 = \overline{(p'_1,q'_1)} = \overline{(p_1,q_1)}$ et $x_2 = \overline{(p'_1,q'_1)} = \overline{(p_2,q_2)}$ alors

$$\begin{cases} (p_1,q_1)\mathcal{R}(p'_1,q'_1) \\ (p_2,q_2)\mathcal{R}(p'_2,q'_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p_1,q_1) + (p_2,q_2)\mathcal{R}(p'_1,q'_1) + (p'_2,q_2) \\ (p_1,q_1) \cdot (p_2,q_2)\mathcal{R}(p'_1,q'_1) \cdot (p'_2,q'_2) \end{cases}$$

ainsi

$$\begin{cases} \overline{(p_1,q_1) + (p_2,q_2)} = \overline{(p'_1,q'_1) + (p'_2,q'_2)} \\ \overline{(p_1,q_1) \cdot (p_2,q_2)} = \overline{(p'_1,q'_1) \cdot (p'_2,q'_2)} \end{cases}.$$

Ainsi on trouve le même résultat pour $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$, quels que soient les représentants choisis. ∎

**Notation:** On notera désormais $\frac{p}{q} := \overline{(p,q)}$.

**Théorème 0.2.6.**
L'ensemble $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

*Démonstration.* Soient $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ et $\frac{p_3}{q_3}$ des éléments de $\mathbb{Q}$. Avec la définition des lois proposée précédemment, on a:

◇ $+$ est commutative:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} = \frac{p_2q_1 + p_1q_2}{q_2q_1} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1}.$$

◇ $+$ est associative:

$$\frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right) = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2q_3 + p_3q_2}{q_2q_3} = \frac{p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2}{q_1q_2q_3}$$

et

$$\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} + \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2}{q_1q_2q_3}.$$

◇ $\frac{0}{1}$ est l'élément neutre pour $+$.

◇ L'opposé de $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{-p_1}{q_1}$, en effet,

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{-p_1}{q_1} = \frac{p_1q_1 - p_1q_1}{q_1q_1} = \frac{0}{q_1q_1} = \frac{0}{1}.$$

◇ $\cdot$ est commutative:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2} = \frac{p_2p_1}{q_2q_1} = \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_1}{q_1}.$$

◇ $\cdot$ est associative:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\left(\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}\right)=\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2p_3}{q_2q_3}=\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}=\frac{p_1p_2}{q_1q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}=\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\right)\cdot\frac{p_3}{q_3}.$$

◇ La distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$; la multiplication étant commutative, on pourra se contenter d'étudier la distributivité à gauche:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\left(\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}\right)=\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2q_3+p_3q_2}{q_2q_3}=\frac{p_1(p_2q_3+p_3q_2)}{q_1q_2q_3}=\frac{p_1p_2q_3+p_1p_3q_2}{q_1q_2q_3},$$

et

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_1p_2}{q_1q_2}+\frac{p_1p_3}{q_1q_3}=\frac{p_1p_2q_1q_3+p_1p_3q_1q_2}{q_1q_2q_1q_3}=\frac{p_1p_2q_3+p_1p_3q_2}{q_1q_2q_3}.$$

◇ L'élément neutre pour $\cdot$ est $\frac{1}{1}$.

◇ Pour $\frac{p_1}{q_1}\neq\frac{0}{1}$, l'inverse de $\frac{p_1}{q_1}$ est $\frac{q_1}{p_1}$, en effet

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{q_1}{p_1}=\frac{p_1q_1}{p_1q_1}=\frac{1}{1}.$$

■

### 0.2.3 Dernières vérifications.

**Proposition 0.2.7.**
L'application

$$\varphi:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q}\\ p & \longmapsto & \frac{p}{1}\end{array}$$

est un morphisme injectif d'anneau.

*Démonstration.* Tout d'abord, $\varphi(1)=\frac{1}{1}$ qui est l'élément neutre de $\cdot$ dans $\mathbb{Q}$. Soient $p$ et $p'$ deux éléments de $\mathbb{Z}$,

$$\varphi(p+p')=\frac{p+p'}{1}=\frac{p}{1}+\frac{p'}{1}=\varphi(p)+\varphi(p')$$

et

$$\varphi(pp')=\frac{pp'}{1}=\frac{p}{1}\cdot\frac{p'}{1}=\varphi(p)\varphi(p').$$

L'application $\varphi$ est donc un morphisme d'anneau. De plus, le noyau de $\varphi$ est constitué des entiers relatifs $p$ vérifiant $\varphi(p)=\frac{0}{1}$ c'est-à-dire $p=0$, ce qui prouve l'injectivité de $\varphi$. ■

**Remarque:** Grâce à ce morphisme, nous pouvons confondre l'entier relatif $p$ et le nombre rationnel $\varphi(p)$, ce qui nous permet de considérer $\mathbb{Z}$ comme une partie de $\mathbb{Q}$ et même comme un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

**Proposition 0.2.8.**
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$.

*Démonstration.* Soit $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que

$$r = \frac{p}{q} = \frac{p}{1} \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{1} \cdot \left(\frac{q}{1}\right)^{-1} = \varphi(p) \cdot (\varphi(q))^{-1} .$$

Et comme nous identifions $p$ et $\varphi(p)$, on a $r = pq^{-1}$.

La première partie a permis d'établir que si le plus petit corps recherché existe alors il s'écrit sous la forme $\{pq^{-1} | p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\}$, or le corps trouvé s'écrit sous cette forme, c'est donc le plus petit. ∎