Comparaison de fonctions au voisinage d'un point: domination, prépondérance, équivalence. Exemples.

0.1 Définitions.

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, a un élément de l'adhérence de D.

Dans ce qui suit, les lettres f, g et h désignent des fonctions numériques définies sur D.

Rappelons que par voisinage de a il faut entendre, si a est réel, toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert qui contient a et si $a = +\infty$ (respectivement $-\infty$) toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $]b, +\infty[$ (rexpectivement $] - \infty, b[$).

Définition 0.1.1.

- f est dominée par g en a si, et seulement si il existe un voisinage V de a et k réel tels que:
$$|f(x)| \leq k \cdot |g(x)| \text{ pour tout } x \in V \cap D.$$
- f est négligeable devant g en a si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de a tel que:
$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \text{ pour tout } x \in V \cap D.$$
- f est équivalent à g en a si, et seulement si $f - g$ est négligeable devant g.

Remarque: On dit indifféremment que f est négligeable devant g ou que f est prépondérante devant g.

Définition 0.1.2.
On dit que f est égale au voisinage de a à g (et on note $f =_a g$) si, et seulement si il existe un voisinage V de a tel que:
$$\forall x \in V \cap D, \ f(x) = g(x).$$

Remarque: La relation $=_a$ est une relation d'équivalence compatible avec les opérations de l'algèbre des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ $(F(D, \mathbb{R}))$.

Proposition 0.1.3.
f est dominée par (respectivement négligeable devant, rexpectivement équivalente à) g en a si, et seulement si il existe une fonction u de D dans $\mathbb{R}$, bornée sur D (respectivement de limite nulle en a, respectivement de limite égale à 1 en a) telle que
$$f =_a u \cdot g.$$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $f =_a u \cdot g$ comme proposé, alors c'est évident.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe un voisinage V de a et k un réel tel que

$$|f(x)| \leq k \cdot |g(x)| \text{ pour tout } x \in V \cap D.$$

Définissons une fonction u de D par:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) = 0 \text{ ou si } x \in D \setminus V, \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0 \text{ et } x \in V \cap D. \end{cases}$$

En observant que la relation $|f(x)| \leq k \cdot |g(x)|$ pour tout $x \in V \cap D$ entraîne que f s'annule en tout point de $V \cap D$ où g s'annule, on vérifie que $\forall x \in V \cap D$, $f(x) = u(x) \cdot g(x)$ et u est bornée par k sur D.

Les démonstrations sont analogues sous les hypothèses de négligeabilité ou d'équivalence.

■

Remarque: Dans le cas où g ne s'annule pas sur D, les conditions se simplifient en: f est dominée par (respectivement négligeable devant, respectivement équivalente à) g si, et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a (de limite nulle en a, de limite égale à 1 en a).

Notations: $O_a(g)$ (respectivement $o_a(g)$) est l'ensemble des fonctions dominées par (respectivement négligeable devant) g. Conformément à la notation de Landau, nous écrirons

$$f = O_a(g) \quad \text{ou encore} \quad f(x) = O_a(g(x))$$

au lieu de

$$f \in O_a(g).$$

Remarque: Les seules fonctions équivalentes à la fonction nulle sont les fonctions égales au voisinage de a à la fonction nulle.

0.2 Principales propriétés des relations de comparaison.

- $o_a(g) \subset O_a(g)$ et se sont des sous-espaces vectoriel de $F(D, \mathbb{R})$.
- Les relations de domination et de négligeabilité sont transitives.
  De plus,
  $$\text{si } f = O_a(g) \text{ et } g = o_a(h) \text{ alors } f = o_a(h),$$
  $$\text{si } f = o_a(g) \text{ et } g = O_a(h) \text{ alors } f = o_a(h).$$
  La relation "est equivalente à" (notée $\sim$) est une relation d'équivalence.
- Les trois relations sont compatibles avec la multiplication des fonctions.
  De plus, si f et g ne s'annulent pas sur D,
  $$f \sim_a g \Rightarrow \frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}.$$
- Aucune des trois relations n'est compatible avec l'addition des fonctions.
  Cependant, si $f_1 \sim_a c_1 g$ et $f_2 \sim_a c_2 g$ avec $c_1 + c_2 \neq 0$ alors
  $$f_1 + f_2 \sim_a (c_1 + c_2) g.$$

- Composition à droite: Soit Δ une partie de $\mathbb{R}$, α un point d'adhérence de Δ dans $\mathbb{R}$, φ une application de Δ dans D telle que $\lim_\alpha \varphi = a$; alors a est un point de $\overline{D}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et si f est dominée par (respectivement négligeable devant, respectivement équivalente à) g en a, alors $f \circ \varphi$ l'est par (respectivement devant, respectivement à) $g \circ \varphi$ en α.
La composition à gauche donne en général des résultats faux.

0.3 Exemples et applications.

- Si l'on convient de désigner par 1 la fonction constante égale à 1 en tout point de D, on obtient:
(i) f est bornée au voisinage de a si, et seulement si
$$f = O_a(1).$$
(ii) f admet L pour limite réelle en a si, et seulement si
$$f - L = o_a(1).$$
(iii) f admet $L \neq 0$ pour limite réelle en a si, et seulement si
$$f \sim_a L.$$

- Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a,
$$f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) = o_a(x-a).$$
Si de plus, $f'(a) \neq 0$,
$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x-a).$$
Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au voisinage de a,
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k = O_a\left((x-a)^{n+1}\right).$$
Si f admet une dérivée $n^{\text{ème}}$:
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k = o_a\left((x-a)^{n+1}\right).$$

- Equivalence et signe: Si $f \sim_a g$ alors il existe un voisinage V de a tel que sur $V \cap D$ f et g ont les mêmes zéros et même signe en dehors de ces points.
Exercice: Etudier la monotonie, au voisinage de $+\infty$, de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}.$$

◇ Equivalence et limite: Si f et g sont équivalentes en a alors f admet une limite en a alors f admet une limite en a si, et seulement si f en admet une et ces limites sont égales.

Exercices:

1.
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^x - 1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}.$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}.$$

3.
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\arccos x}{\sqrt{|\ln x|}}.$$

Démonstration. 1. Soit $f(x) = x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1$. Puisque $f'(x) = (\ln x + 1)\cdot x^x$, on a:

$$f(x) = f(x) - f(1) \sim_1 x - 1.$$

Soit $\varphi(x) = \sqrt{x^2-1}$,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \varphi(x) = 0.$$

Or $\ln(1-x) \sim_0 -x$, ainsi

$$\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right) \sim_1 -\sqrt{x^2-1}.$$

Donc,

$$\frac{x^x-1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)} \sim_1 -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0,$$

d'où

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^x-1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)} = 0.$$

2.
$$\sin x \sim_0 x, \quad \sqrt{1+x} \sim_0 1 + \frac{x}{2}, \quad e^{1+\frac{x}{2}} \sim_0 \frac{ex}{2} + e \quad \text{et} \quad \tan x \sim_0 x,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x} = \frac{e}{2}.$$

■