Caractérisation des fonctions x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ par l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)f(y)$. Applications.

Pré-requis:

◇ Définitions et propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes.
◇ Notion de bijectivité, continuité et dérivabilité.

0.1 Equation fonctionnelle (E): $f(xy) = f(x)f(y)$.

0.1.1 Etude.

Théorème 0.1.1.
Soit f non identiquement nulle définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue en un point alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

si, et seulement si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = e^{\alpha \ln x},\ x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Démonstration. • Soit $x > 0$, montrons que $f > 0$:

$$f(x) = f\left((\sqrt{x})^2\right) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 \geq 0.$$

Si il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f(x) = f\left(\frac{x}{x_0}\right) f(x_0) = 0$ donc $f > 0$ car $f \not\equiv 0$.

• Supposons que f est continue en x_0 et montrons que f est continue en tout point x_1 de $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = f\left(\frac{xx_0}{x_1}\right) f\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} f\left(\frac{xx_0}{x_1}\right) f\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \\ &= \lim_{Y \to x_0} f(Y) f\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \quad Y = \frac{xx_0}{x_1} \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_0) f\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = f(x_1).$$

Remarque; $f(x) = f\left(\frac{x}{x_1}\right) f(x_1)$ donc $f(x_1) = f(1)f(x_1)$ et par conséquent $f(1) = 1$ car $f > 0$.

- Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:
  Posons
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt,$$
$$F(xy) = \int_1^{xy} f(t)\,dt = \int_1^y f(t)\,dt + \int_y^{xy} f(t)\,dt.$$
  Dans la dernière intégrale, on pose $t = uy$, ainsi
$$\begin{aligned}\int_y^{xy} f(t)\,dt &= \int_1^x yf(uy)\,du\\ &= yf(y)\int_1^x f(u)\,du\\ &= yf(y)F(x)\end{aligned}$$
  D'où
$$F(xy) = F(y) + yf(y)F(x).$$
  Or il existe $x_0 > 1$ tel que $F(x_0) \neq 0$ et
$$f(y) = \frac{F(x_0y) - F(y)}{yF(x_0)}$$
  qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- En dérivant par rapport à x, $f(xy) = f(x)f(y)$ on obtient:
$$yf'(xy) = f(y)f'(x)$$
  ainsi pour $x = 1$,
$$yf'(y) = f(y)f'(1) \Leftrightarrow \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{f'(1)}{y}$$
  d'où
$$\ln f(y) = f'(1)\ln y + k$$
  donc
$$f(y) = Ke^{f'(1)\ln y}$$
  or $f(1) = 1$ donc $K = 1$ c'est-à-dire $f(y) = e^{f'(1)\ln y}$.

$\blacksquare$

0.1.2 Puissance d'un réel strictement positif.

Remarque:$\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$,
$$e^{r\ln a} = a^r.$$

Notation: $\forall a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on note
$$a^b := e^{b\ln a}.$$

✎ **Propriété 0.1.2.**
$\forall (a, a') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $(b, b') \in \mathbb{R}^2$:

1. $$a^b a^{b'} = a^{b+b'}.$$
2. $$a^b\, a'^{\,b} = (aa')^b.$$
3. $$(a^b)^{b'} = a^{bb'}.$$
4. $$\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}.$$
5. $$\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a^{b'}}.$$

0.2 Etude des fonctions puissances.

0.2.1 Fonction puissance.

Définition 0.2.1.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance toute fonction

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}.$$

Remarque: $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$. On supposera $\alpha \neq 0$.

0.2.2 Limites aux bornes.

Proposition 0.2.2.
Si $\alpha > 0$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

Si $\alpha < 0$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0.$$

Proposition 0.2.3.

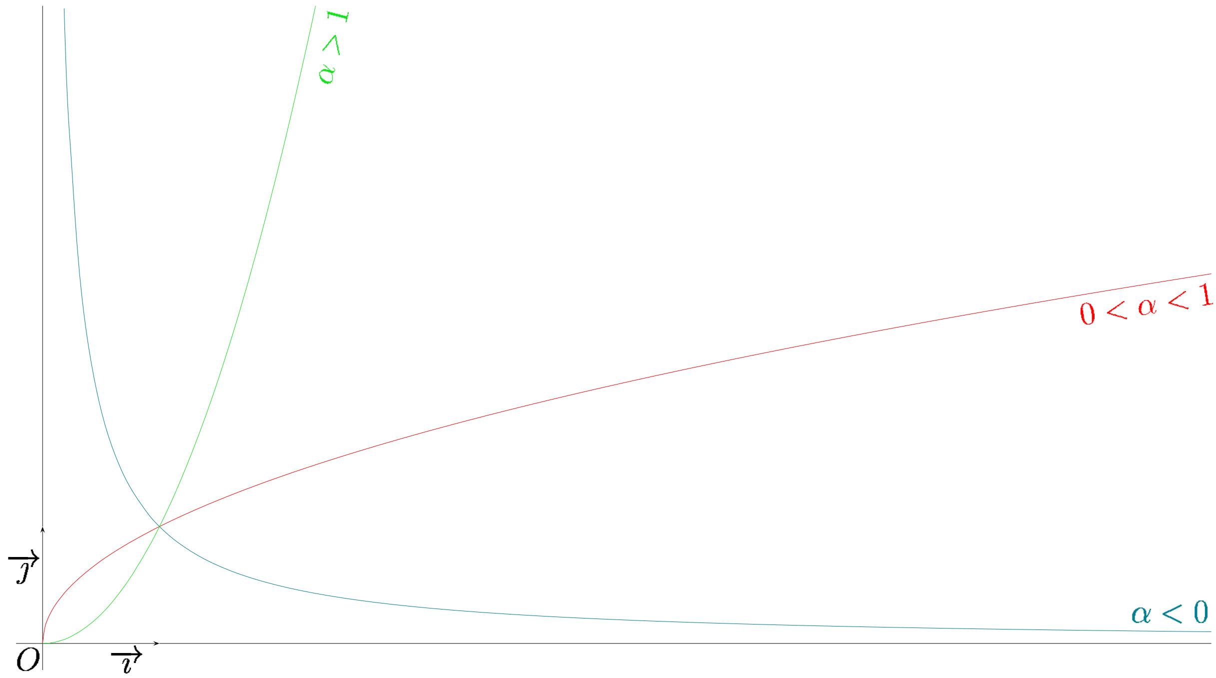
- Si $\alpha < 0$, (Ox) et (Oy) sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_\alpha$ de f_α respectivement en $+\infty$ et en O^+.
- Si $\alpha > 1$, $\mathcal{C}_\alpha$ admet une branche parabolique de direction (Oy).
- Si $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{C}_\alpha$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

0.2.3 Sens de variation.

Théorème 0.2.4.
f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Proposition 0.2.5.

- Si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante et convexe.
- Si $0 < \alpha < 1$, f_α est strictement croissante et concave.
- Si $\alpha > 1$, f_α est strictement croissante et convexe.



0.2.4 Comparaison avec l'exponentielle et le logarithme.

Théorème 0.2.6.
$\forall \alpha > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

0.3 Applications.

Exercice 1: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre
$$xy' = \alpha y.$$

Exercice 2: Montrer que ln n'est pas une fonction rationnelle.

Exercice 3: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \geq 0$, comparer $(a+b)^\alpha$ et $a^\alpha + b^\alpha$ suivant les valeurs de α.