Caractérisation des fonctions exponentielles par l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$. Applications.

Pré-requis:

◇ Notion de limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$, de continuité et de dérivabilité pour les fonctions réelles de la variable réelle.
◇ Théorème d'existence d'une bijection réciproque pour une application continue et strictement monotone sur un intervalle.
◇ Connaissance des fonctions logarithmes.
◇ Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

0.1 Introduction.

Pour tout réel non nul a, l'application $f_a : n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n$ (avec la convention $a^0 = 1$) satisfait à: $f_a(n+m) = f_a(n)f_a(m)$ pour tout entier n et m. Lorsque $a > 0$, et q est un entier naturel non nul, on note $a^{\frac{1}{q}}$ le réel $\sqrt[q]{a}$ (l'application $x \in \mathbb{R}_+^* :\mapsto \sqrt[q]{x}$ est définie comme l'application réciproque de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^q$). Si r est un rationnel dont un représentant est $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $a^r = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ et l'application $f_a : r \in \mathbb{Q} \mapsto a^r$ satisfait aussi à la contion: $f_a(r+s) = f_a(r)f_a(s)$ pour tous rationnels r et s.

Il est alors naturel de rechercher l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telles que pour tous réels x, y:

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

$\mathcal{E}$ est non vide car la fonction nulle (notée 0) est dans $\mathcal{E}$, si f s'annule en un point a alors $f \equiv 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x-a)f(a)$). Si $f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, alors $f > 0$ car $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

0.2 Définition des fonctions exponentielles. Conséquences.

✎ **Définition 0.2.1.**
Soit a un réel strictement positif et distinct de 1, on appelle fonction exponentielle de base a la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a. On la notera $\exp_a$.

Conséquences:

◇ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp_a(x+y) = (\exp_a x)(\exp_a y).$$

◇ $\forall r \in \mathbb{Q}$,

$$\exp_a(rx) = (\exp_a x)^r.$$

En remarquant que $\exp_a 1 = a$, on a $\exp_a r = a^r$.

La fonction $\exp_a$ prolonge donc à $\mathbb{R}$ l'application $f_a : r \in \mathbb{Q} \mapsto a^r$ et étend la formule $f_a(r+s) = f_a(r)f_a(s)$ aux réels. On adoptera donc la notation:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a x = a^x.$$

0.3 Etude rapide de la fonction exponentielle.

Afin de réduire les énoncés à leur minimum, on se limite à la fonction $\exp_e$ (notée $\exp$) étant entendu que l'adaptation des preuves pour $\exp_a$ se fait en remarquant que $\exp_a = \exp \circ f$ où $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x \ln a$.

Théorème 0.3.1.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec sa dérivée.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème de dérivation d'une fonction réciproque, en notant que la dérivée de $\ln$ ne s'annule jamais. ∎

Théorème 0.3.2.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$
- $$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

Démonstration. Le premier point est la définition de la dérivabilité de la fonction exp en 0.

Pour les deux autres points il suffit d'écrire, soit $A > 0$, alors pour tout $x > \ln A$ on a $\exp(x) > A$ et soit $\varepsilon > 0$, pour $x < \ln \varepsilon$ on a $0 < \exp x < \varepsilon$. ∎

0.4 Les solutions de l'equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Il s'agit de déterminer les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sans autre hypothèse, ce problème est inabordable, nous allons donc rechercher les solutions suffisamment régulières.

0.4.1 Recherche des solutions continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème 0.4.1.
Les solutions de l'equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et non nulles, sont les fonctions exponentielles.

Démonstration. Toute solution non nulle d'une telle équation fonctionnelle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et les fonctions exponentielles sont des solutions continues: montrons que se sont les seules: Soit f une solution continue et non nulle de l'équation fonctionnelle considérée. Alors:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$f(nx) = (f(x))^n.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
$$f(nx) = (f(x))^n.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$,
$$f(rx) = (f(x))^r.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = a^x \quad \text{où } a = f(1).$$

■

Exercice: Toute solution continue en un point de $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit f une telle fonction continue en un point α. Pour tous réels x_0 et h on a:

$$f(x_0 + h) = f(x_0 - \alpha) f(\alpha + h)$$

or

$$\lim_{h \to 0} f(\alpha + h) = f(\alpha)$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0 - \alpha) f(\alpha) = f(x_0).$$

■

0.4.2 Recherche des solutions monotones sur $\mathbb{R}$.

Théorème 0.4.2.
Les solutions de l'equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ qui sont monotones sur $\mathbb{R}$ et non nulles, sont les fonctions exponentielles.

Démonstration. Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation fonctionnelle. Pour tout réel x, il existe des suites adjacentes (u_n) et (v_n) de nombres rationnels qui convergent vers x. Pour tout n, on a $f(u_n) = a^n$ où $a = f(1)$ (ceci provient de ce qui précède) et la fonction $\exp_a$ étant continue sur $\mathbb{R}$ on en déduit que la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers a^x. Il en est de même pour la suite $(f(v_n))$.

On conclut que $f(x) = a^x$, car pour tout n, $f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n)$ ou $f(v_n) \leq f(x) \leq f(u_n)$ suivant que f est croissante ou décroissante. ■

0.5 Applications.

1. Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

Démonstration. On se ramène à l'équation fonctionnelle étudiée en posant $g = 1 + f$. Les fonctions solutions sont du type $x \mapsto a^x - 1$ avec $a > 0$ ou $x \mapsto -1$. ∎

2. Même question pour

$$f(x+y) + x + y = (f(x) + x)(f(y) + y).$$

Démonstration. On considère

$$g : x \mapsto f(x) + x.$$

∎

3. Même question pour

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}.$$

Démonstration. On vérifie d'abord que si une telle fonction prend la valeur 1 en un point α alors elle est constante de valeur 1 en écrivant $f(x) = f(x - \alpha + \alpha)$. En écartant ce cas trivial, on considère

$$g = \frac{1+f}{1-f}.$$

∎

4. Chercher les fonctions continues f et g telles que g soit paire et vérifiant:

$$g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$$

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

Démonstration. On considère $h = f + g$ et $k = f - g$. ∎