Caractérisation de la fonction exponentielle $x \mapsto e^{ax}$, où a appartient à $\mathbb{R}$ par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition intiale. Applications.

Pré-requis:

◇ Notion de continuité et de dérivabilité pour les fonctions réelles de la variable réelle.
◇ Toute fonction à dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.
◇ L'application exponentielle $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$ $(a \in \mathbb{R})$ dont la dérivée est $x \in \mathbb{R} \mapsto ae^{ax}$.
◇ Notion d'espace vectoriel, de sous-espace et de dimension.

0.1 Définitions et remarques géométriques.

Définition 0.1.1.

Soit a un réel, I un intervalle réel infini et f une application de I vers $\mathbb{R}$.

(i) On appelle équation différentielle homogène linéaire du premier ordre à coefficient constant, une équation du type

$$(E) \qquad y' = ay$$

d'inconnue y, recherchée dans l'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des applications dérivables de I vers $\mathbb{R}$.

(ii) On appelle courbe intégrale de (E) toute courbe représentative d'une fonction solution.

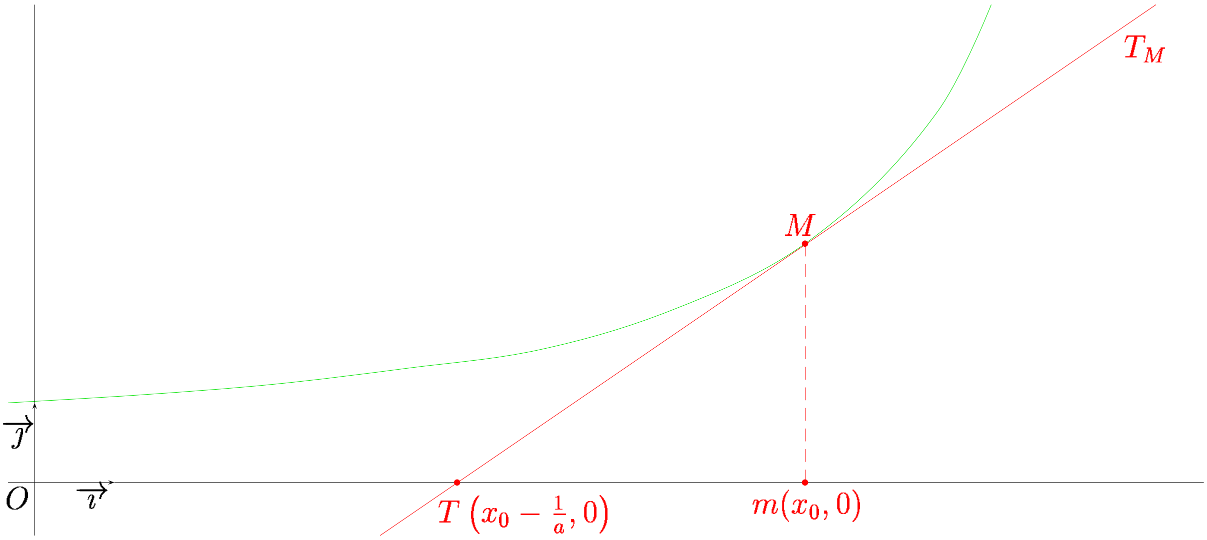
Remarques:

a) Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, l'application $M = (x_0, y_0) \mapsto T_M$, où T_M désigne la droite passant par M et de coefficient directeur ay_0, est appelé champs de tangentes associée à (E). En chaque point M d'une courbe intégrale de (E) la tangente est donc T_M.

b) Une équation de T_M est:

$$y = ay_0(x - x_0) + y_0.$$

On a un procédé pratique de construction d'un champs de tangentes à (E), puisque T_M passe par les points (x_0, y_0) et $\left(x_0 - \frac{1}{a}, 0\right)$.



On remarque alors que le vecteur sous-tangent à la courbe intégrale de (E) en $M(x_0, y_0)$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{mT}$) est un vecteur constant égal à $-\frac{1}{a}\vec{\imath}$.

Exercice: Montrer que parmi les fonctions dérivables sur I, et dont la dérivée ne s'annule pas sur I, celles dont la représentation graphique admet en chaque point un vecteur sous-tangent de valeur constante $\alpha\vec{\imath}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) sont exactement les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{\alpha}y$.

Démonstration. Soit f une application vérifiant les hypothèses de l'énoncé et $M(x_0, f(x_0))$. T_M à pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, ainsi

$$x_T = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

car f' ne s'annule pas, donc la longueur algèbrique de la sous-tangente vaut:

$$x_T - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \alpha$$

donc

$$f'(x_0) = -\frac{1}{\alpha} f(x_0).$$

∎

0.2 Résolution de $y' = ay$, où a est un réel.

Désignons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation, recherchée dans $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.

On remarque que les applications nulles et $x \mapsto e^{ax}$ sont des solutions particulières et que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de $\mathbb{R}$ (sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$), ainsi les applications $x \mapsto \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, sont solutions; y en a-t-il d'autres?

Théorème 0.2.1.

$$\mathcal{S} = \{\lambda e^{ax} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto e^{ax}$.

Démonstration. Pour toute fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ il existe une unique fonction z définie sur I, telle que pour tout $x \in I$ on ait

$$y(x) = z(x)e^{ax}$$

(en effet $z(x) = y(x)e^{-ax}$), on a alors les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ e^{ax}\left(z'(x) + az(x)\right) = az(x)e^{ax} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ z(x) = \lambda. \end{aligned}$$

■

Remarque: Pour $\lambda > 0$,

$$\lambda e^{ax} = e^{\ln \lambda} e^{ax} = e^{a\left(x + \frac{\ln \lambda}{a}\right)},$$

la courbe représentative de $x \mapsto \lambda e^{ax}$ se déduit donc de celle de $x \mapsto e^{ax}$ par une translation de vecteur $-\frac{\ln \lambda}{a}\overrightarrow{\imath}$. Si $\lambda < 0$, alors on trace la courbe représentative de $x \mapsto -\lambda e^{ax}$ et on la symétrise par rapport à $(O, \overrightarrow{\imath})$.

Théorème 0.2.2.
(Le problème de Cauchy)
Quel que soit le couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ qui satisfait aux conditions:

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Géométriquement, cela signifie qu'il existe une et une seule courbe intégrale passant par le point (x_0, y_0).

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que les solutions de (E) sont de la forme λe^{ax} avec λ un réel. Si, de plus, $y(x_0) = y_0$, alors $\lambda e^{ax_0} = y_0$ d'où $\lambda = y_0 e^{-ax_0}$, la solution du problème de Cauchy est alors $x \mapsto y_0 e^{a(x - x_0)}$. ■

Corollaire 0.2.3.
La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$ est caractérisée comme unique solution du système:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = ay(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

0.3 Applications.

0.3.1 L'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Caractérisons les applications de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non identiquement nulles et solutions de l'équation fonctionnelle:

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f'(x + x_0) = f(x_0)f'(x)$$

pour tout réel x; d'où pour tout x_0:

$$f'(x_0) = f'(0)f(x_0).$$

0.3.2 Exemple d'équation se ramenant au cas linéaire d'ordre 1.

Les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)f(-x) = 1$$

sont de la forme $\lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration.

- Si f est solution, alors $g : x \mapsto f(x)f(-x)$ est de dérivée nulle, donc constante sur $\mathbb{R}$. Comme f ne s'annule jamais, il en est de même pour g.
  Finalement, si f est solution, alors il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout x on ait $f(x)f(-x) = k$ et donc
  $$f'(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{k}f(x)$$
  et f est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{k}}$ avec $(\lambda, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
- Inversement, $x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{k}}$ est solution si, et seulement si $\lambda^2 = k$:

$$f'(x) = \frac{\lambda}{k}e^{\frac{x}{k}} \Rightarrow f'(x)f(-x) = \frac{\lambda^2}{k} = 1.$$

■