Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples.

Cadre: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I. On se propose d'obtenir des valeurs approchées des zéros de f avec un contrôle de la précision obtenue. On suppose que ces zéros sont séparés.

Soit donc $[a, b] \subset I$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$ et tel que f admette un unique zéro r sur $[a, b]$.

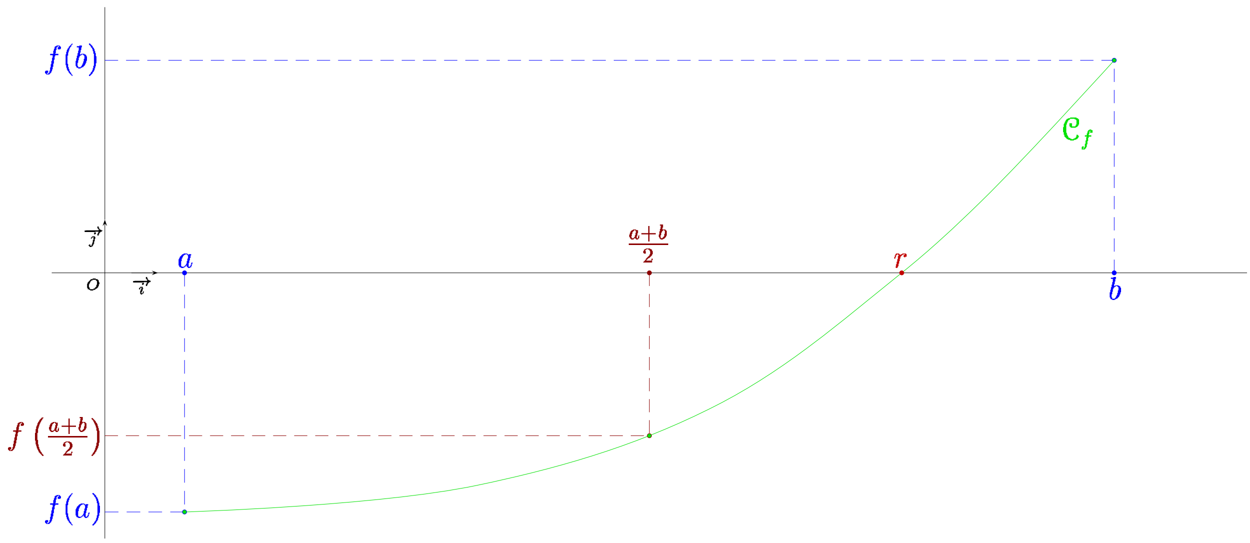
Dans cette leçon, nous exposons deux méthodes d'approximation de r essentiellement différentes: la dichotomie et la linéarisation. Nous les illustrerons sur l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ qui admet une seule racine réelle r, localisée dans $[0, 1]$ (pour mieux suivre les performances des méthodes décrites, disons de suite que $r = 0,682327804...$).

Pré-requis:

- ◇ Le théorème des valeurs intermédiaire.
- ◇ Les suites u définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- ◇ Le théorème des accroissements finis.

0.1 La dichotomie.

Pour illustrer nos propos, nous pourrons proposer la représentation suivante:



Remarque: La méthode repose sur le théorème des valeurs intermédiaires: Si α et β sont deux éléments de $[a, b]$ tels que $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$, r est compris entre α et β.

On systématise alors cette idée par itération en introduisant les deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations:

- $$a_0 = a \text{ et } b_0 = b.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{si } f(a_n) \cdot f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 \\ \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ces deux suites vérifient pour tout naturel n, $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$, de sorte que $a_n \leq r \leq b_n$ et puisque $a_n - b_n = \frac{a-b}{2^n}$, elles convergent vers r, l'amplitude de l'encadrement étant diminué de moitié à chaque étape.

Sur l'exemple mentionné, il est nécessaire de prendre $n = 4$ pour avoir un encadrement de r d'amplitude 10^{-1}:

On démarre avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ car $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$.

◇ $f(0,5) < 0$ donc $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 1$,

◇ $f(0,75) > 0$ donc $a_2 = 0,5$ et $b_2 = 0,75$,

◇ $f(0,625) < 0$ donc $a_3 = 0,625$ et $b_3 = 0,75$,

◇ $f(0,6875) > 0$ donc $a_4 = 0,625$ et $b_1 = 0,6875$,

on obtient alors

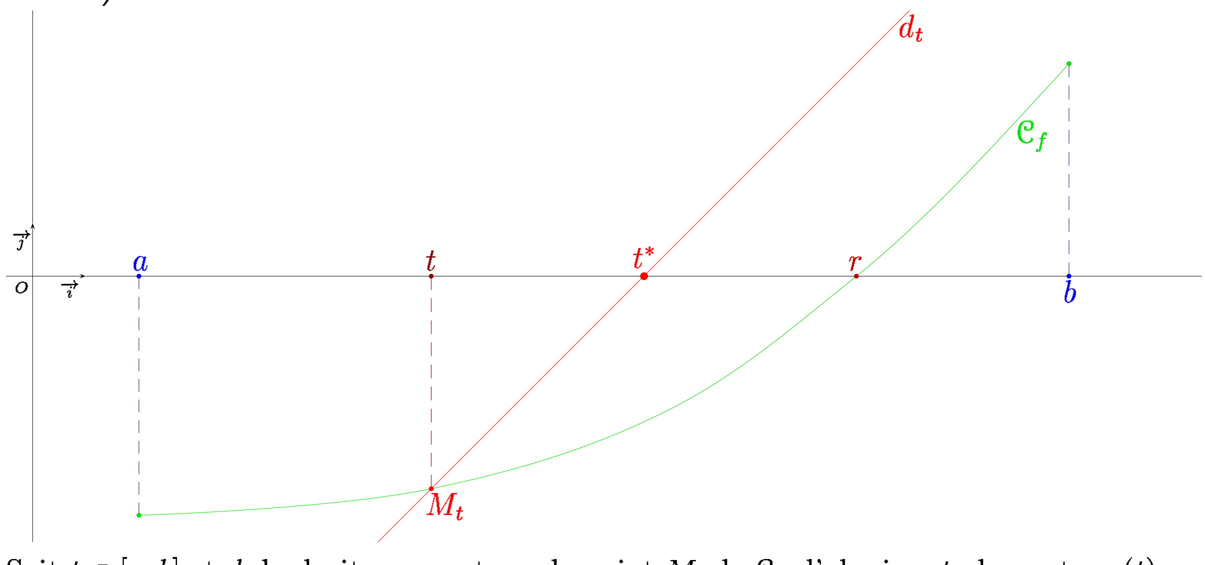
$$0,6 < r < 0,7.$$

0.2 La linéarisation.

0.2.1 Méthode générale.

L'idée est de remplacer f sur $[a,b]$ par une fonction affine non constante et donc d'approximer r par le zéro de cette fonction affine.

Visualisons cette méthode géométriquement en tracant la courbe $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:



Soit $t \in [a,b]$ et d_t la droite passant par le point M_t de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse t, de pente $m(t)$ non nulle.

L'abscisse t^* du point d'intersection de d_t avec $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ est donné par

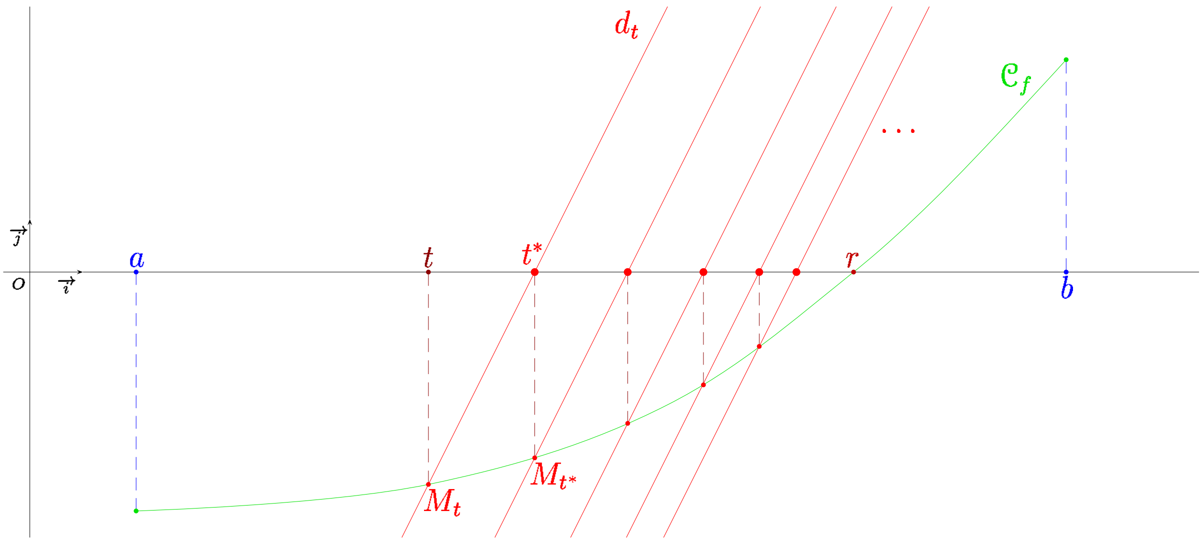
$$t^* = t - \frac{f(t)}{m(t)}.$$

Il est à prévoir qu'un choix raisonnable de $m(t)$ conduira au fait que t^* est une meilleure approximation de r que t.

L'idée est ensuite d'itérer le processus.

Nous avons alors le choix de garder $m(t)$ constant (on parle d'ajustement linéaire) ou non.

Méthode d'ajustement linéaire



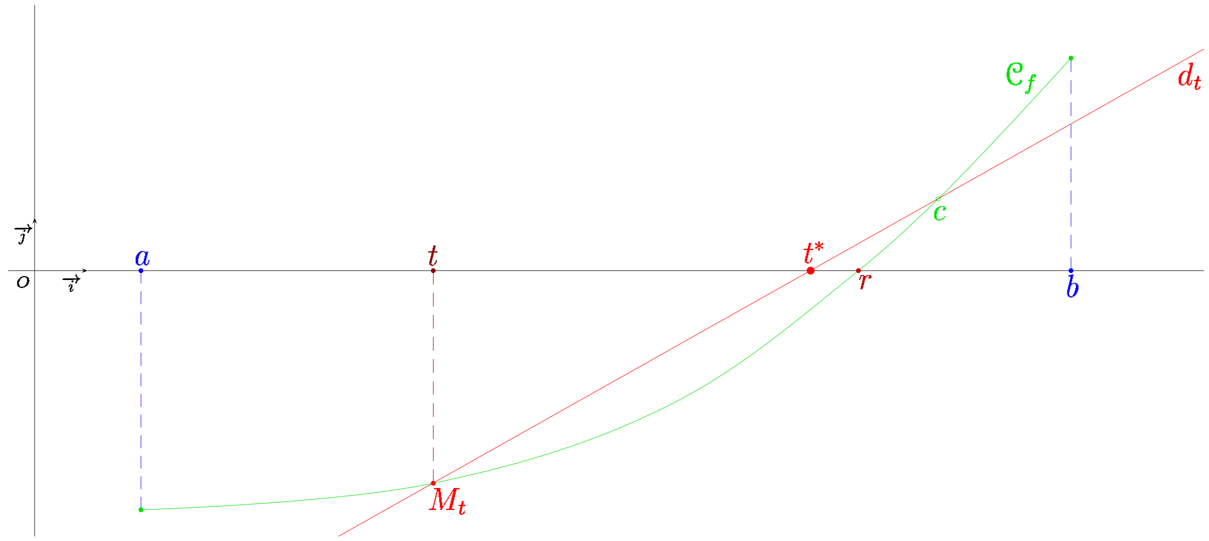
Dans le deuxième cas, deux méthodes ont pris nom:

◇ c étant choisit dans $[a, b]$, on prend

$$m(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c} & \text{si } t \neq c \\ f'(c) & \text{si } t = c \end{cases}.$$

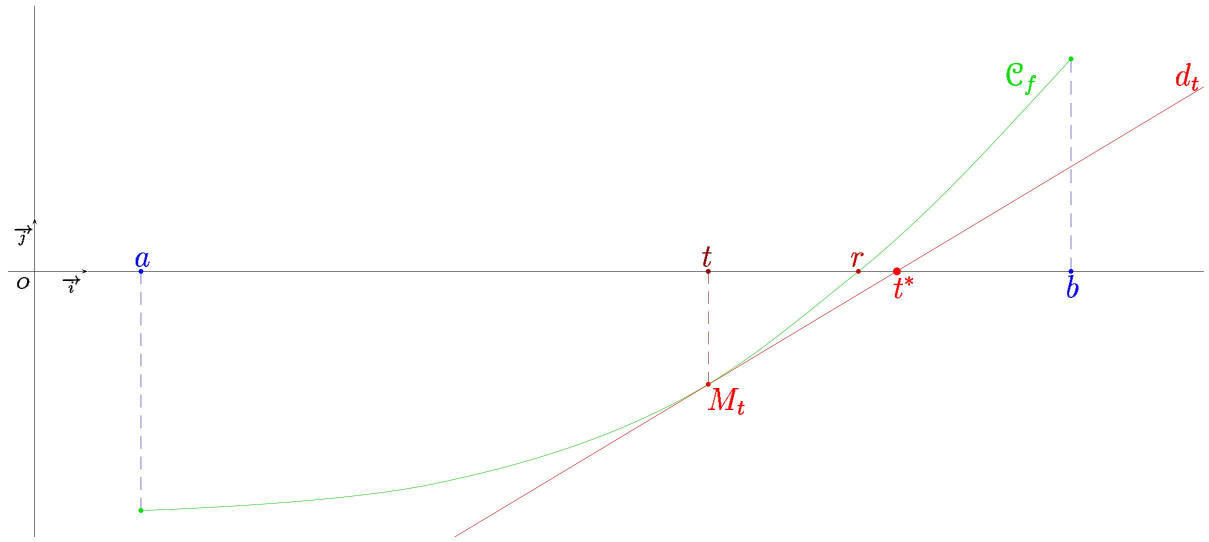
alors d_t n'est autre que la droite $(M_t M_c)$. Cela conduit à la méthode de *Lagrange* (ou méthode des sécantes).

Méthode de Lagrange



◇ $m(t) = f'(t)$: d_t n'est alors autre que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_t. Cela conduit à la méthode de *Newton* (ou méthode des tangentes).

Méthode de Newtow



Remarque: Si φ est la fonction définie sur $[a, b]$ par $\varphi(t) = t - \frac{f(t)}{m(t)}$, on a $f(x) = 0$ si, et seulement si $\varphi(x) = x$.

Autrement dit, ces méthodes ont tranformé le problème initial en un problème de recherche de point fixe d'une fonction.

Il nous reste à aller plus en avant dans la description de ces trois méthodes:

0.2.2 Ajustement linéaire.

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$. Quitte à considérer $-f$ on peut toujours se ramener au cas: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $f' > 0$ sur $[a, b]$.

Posons,

$$m_1 = \inf_{t\in[a,b]} f'(t) \text{ et } M_1 = \sup_{t\in[a,b]} f'(t).$$

Soit

$$\varphi_\lambda(t) = t - \frac{f(t)}{\lambda} \text{ avec } \lambda > m_1,$$

une fonction définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$|\varphi'_\lambda(t)| = \left|1 - \frac{f'(t)}{\lambda}\right| \leq 1 - \frac{m_1}{\lambda} < 1 \text{ sur } [a,b],$$

donc φ_λ est contractante sur $[a,b]$; elle admet r pour seul point fixe sur $[a,b]$ et stabilise alors le plus grand intervalle J_r centré en r et inclus dans $[a,b]$; intervalle qui contient a si $f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$, qui contient b sinon.

La suite u définies par les relations:

- $$u_0 = a \text{ si } f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0 \quad \text{et} \quad u_0 = b \text{ sinon}$$
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi_\lambda(u_n)$$

converge donc vers r. Cette convergence est d'ordre au moins 1:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leq \left(1 - \frac{m_1}{\lambda}\right)|u_n - r|.$$

Sur l'exemple, avec $[a,b] = [0,1]$, $m_1 = 1$ et $M_1 = 4$. Prenons $\lambda = \frac{5}{2}$. La suite u sera donc définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(-2u_n^3 + 3u_n + 2\right) & \text{pour tout naturel } n \end{cases}$$

et on a la majoration

$$|u_n - r| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n,$$

de sorte que l'on prévoit de prendre $n = 14$ pour avoir une majoration approchée de r à 10^{-3} près.

En réalité, $u_1 = 0,6$, $u_2 = 0,6736\ldots$, $u_3 = 0,6819\ldots$, $u_4 = 0,6823\ldots$. Ainsi u_3 constitue déjà une valeur approchée de r à 10^{-3} près.

0.2.3 Méthode de Lagrange.

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et que f' et f'' ne s'annulent pas sur $[a,b]$.

Quitte à considérer $-f$, $f\circ(-\mathrm{Id})$, $-f\circ(-\mathrm{Id})$ on peut toujours supposer que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f' > 0$ sur $[a,b]$ et $f'' > 0$ sur $[a,b]$.

Proposition 0.2.1.

Posons

$$m_1 = \inf_{t\in[a,b]} f'(t) \text{ et } M_2 = \sup_{t\in[a,b]} f''(t).$$

Alors la fonction φ définie sur $[a,b]$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - \dfrac{f(t)}{\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}} & \text{si } t \neq b \\ t - \dfrac{f(t)}{f'(b)} & \text{si } t = b \end{cases}$$

admet r pour unique point fixe sur $[a,b]$ et stabilise $[a,r]$ et $[b,r]$.

Pour tout $c \in [a,r]$ (respectivement $c \in [r,b]$), la suite u définie par les relations $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$ converge en croissant (respectivement en décroissant) vers r.

La convergence est au moins d'ordre 1:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leq \left(\frac{M_2}{2m_1}(b-a)\right)|u_n - r|\,.$$

Démonstration. Pour $t \neq b$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t - \frac{f(t)}{\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}} \\ &= \frac{f(t)t - f(b)t - tf(t) + bf(t)}{f(t)-f(b)} \\ &= \frac{bf(t) - f(b)t}{f(t)-f(b)}. \end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{(bf'(t) - f(b))(f(t)-f(b)) - (bf(t) - f(b)t)f'(t)}{(f(t)-f(b))^2} \\ &= \frac{bf'(t)f(t) - bf'(t)f(b) - f(b)f(t) + f(b)^2 - bf(t)f'(t) + f(b)f'(t)t}{(f(t)-f(b))^2} \\ &= \frac{f(b)}{(f(t)-f(b))^2}\left(f(b) - f(t) + f'(t)(t-b)\right) \end{aligned}$$

Or d'après le développement de Taylor-Lagrange, il existe $\theta \in]t,b[$ tel que

$$\varphi'(t) = \frac{f(b)}{(f(t)-f(b))^2} \cdot \frac{1}{2}(b-t)^2 f''(\theta),$$

donc $\forall t \in [a,b[$, $\varphi'(t) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $[a,b[$, de plus elle est continue en b elle est donc strictement croissante sur $[a,b]$.

Montrons que φ stabilise $[a,r]$: Puisque φ est strictement croissante sur cet intervalle,

$$\varphi([a,r]) = [\varphi(a), \varphi(r)]$$

or $\varphi(a) > a$ et $\varphi(r) = r$ donc

$$\varphi\left([a,r]\right) \subset [a,r].$$

Montrons que φ stabilise $[r,b]$: Puisque φ est strictement croissante sur cet intervalle,

$$\varphi([r,b]) = [\varphi(r), \varphi(b)]$$

or $\varphi(b) < b$ et $\varphi(r) = r$ donc

$$\varphi([r,b]) \subset [r,b].$$

Soit $c \in [a,r]$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ est monotone car φ est croissante.

$$|u_{n+1} - r| = |\varphi(u_n) - \varphi(r)| \leq \sup_{t\in[a,b]} \varphi'(t) \cdot |u_n - r|,$$

or

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{1}{2}\frac{f(b)}{(f(t)-f(b))^2}(b-t)^2 f''(\theta) \quad \text{avec } \theta \in]t,b[\\
&= \frac{1}{2}\frac{f(b)}{f(b)-f(t)} \cdot \frac{(b-t)^2 f''(\theta)}{(b-t)f'(\mu)} \quad \text{avec } \mu \in]t,b[\\
&\qquad \text{(théorème des accroissements finis)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(r)}{f(b)-f(t)} \cdot \frac{f''(\theta)}{f'(\mu)} \cdot (b-t) \\
&= \frac{\frac{f(b)-f(r)}{b-r}}{\frac{f(b)-f(t)}{b-t}} \cdot \frac{b-r}{b-t} \cdot (b-t) \cdot \frac{f''(\theta)}{2f'(\mu)} \\
&= \underbrace{\frac{\frac{f(b)-f(r)}{b-r}}{\frac{f(b)-f(t)}{b-t}}}_{\leq 1 \text{ (car } f \text{ est convexe)}} \cdot (b-r) \cdot \frac{f''(\theta)}{2f'(\mu)} \\
\varphi'(t) &\leq (b-a) \cdot \frac{M_2}{2m_1}
\end{aligned}$$

■

On comprend sur l'exemple que cette majoration se révèle sans intérêt si $\frac{M_2}{2m_1}(b-a) > 1$. C'est le cas pour $[a,b] = [0,1]$. Alors $M_2 = 6$, $m_1 = 1$ et $\frac{M_2}{2m_1}(b-a) = 3$.
Cependant, la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 - 1}{u_n^3 + u_n - 2}$$

présente une troisième décimale stabilisée à partir de $n = 6$: On trouve $u_1 = 0,5$, $u_2 = 0,636\ldots$, $u_3 = 0,671\ldots$, $u_4 = 0,679\ldots$, $u_5 = 0,681\ldots$, $u_6 = 0,682\ldots$, $u_7 = 0,682\ldots$.

Il est intéressant d'observer sur cet exemple comment le choix de $[a,b]$ conditionne la vitesse de convergence; En prenant $[a,b] = [0,6;0,7]$, on a

$$u_{n+1} = \frac{0,7u_n^3 + 0,657u_n - 0,7}{u_n^3 + u_n - 1,043}$$

et pour $c = 0,6$, on trouve $u_1 = 0,681\ldots$, $u_2 = 0,682\ldots$, $u_3 = 0,682\ldots$.

0.2.4 Méthode de Newton.

Proposition 0.2.2.
Les hypothèses sur f sont les mêmes que pour la méthode de Lagrange. Alors la fonction φ définie sur $[a,b]$ par $\varphi(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, admet r pour seul point fixe sur $[a,b]$ et stabilise l'intervalle $[r,b]$.
Pour tout $c \in [r,b]$, la suite u définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ converge en décroissant vers r.

Cette convergence est au moins d'ordre deux:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} |u_n - r|^2 .$$

Remarque: Cette méthode ne stabilise pas $[a,r]$: $\varphi([a,r]) = [\varphi(a), \varphi(r)] = [\varphi(a), r]$ et $\varphi(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$ car $f' > 0$ et $f(a) < 0$ car $a < r < b$, $f(r) = 0$ et f est strictement croissante. Or

$$\varphi'(t) = 1 - \frac{f'(t)^2 - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2},$$

par conséquent φ est strictement décroissante sur $[a,r]$ donc $\varphi([a,r]) \not\subseteq [a,r]$.

Démonstration. $\varphi(u_n) - \varphi(r) > 0$ car φ stabilise $[r,b]$ (même démonstration que dans la méthode de Lagrange) et $\varphi(r) = r$.

$$\varphi(u_n) - \varphi(r) = \int_r^{u_n} \varphi'(t)\, dt = \int_r^{u_n} \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\, dt,$$

or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]r,t[$ tel que

$$f(t) = f(t) - f(r) = (t-r)f'(\theta),$$

mais $f'' > 0$ sur $]r,t[$, par conséquent f' est croissante, ce qui implique que $f'(\theta) \leq f'(t)$ par conséquent,

$$\frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} \leq (t-r)\frac{f''(t)}{f'(t)} \leq (t-r)\frac{M_2}{m_1}.$$

Donc

$$\varphi(u_n) - \varphi(r) \leq \int_r^{u_n} (t-r)\frac{M_2}{m_1}\, dt = \frac{(u_n - r)^2}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}$$

ainsi

$$|u_{n+1} - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} |u_n - r|^2 .$$

■

Sur l'exemple, avec $[a,b] = [0,1]$, on a

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^3 + 1}{3u_n^2 + 1}$$

et avec la condition initiale $c = 1$, on trouve $u_1 = 0,75$, $u_2 = 0,686\ldots$, $u_3 = 0,682\ldots$, $u_4 = 0,682\ldots$.