Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions.

Pré-requis:

◇ Notion de continuité et de dérivabilité d'une fonction de variable réelle à valeurs réelles.
◇ Le théorème de Rolle.

0.1 Théorème des accroissements finis.

Théorème 0.1.1.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

■

0.2 Inégalité des accroissements finis.

Théorème 0.2.1.
Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si pour tout $t \in]a, b[$, on a $f'(t) \leq g'(t)$, alors pour tout couple $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $x < y$ on aura

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x).$$

Démonstration. Soient $h = f - g$ et x, y dans $[a, b]$ tels que $x < y$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{h(x) - h(y)}{x - y} = h'(c) = g'(c) - f'(c) \geq 0$$

d'où $h(x) \leq h(y)$, ce qui est l'inégalité annoncée. ■

Remarque: Si $y < x$ alors $g(y) - g(x) \leq f(y) - f(x)$.

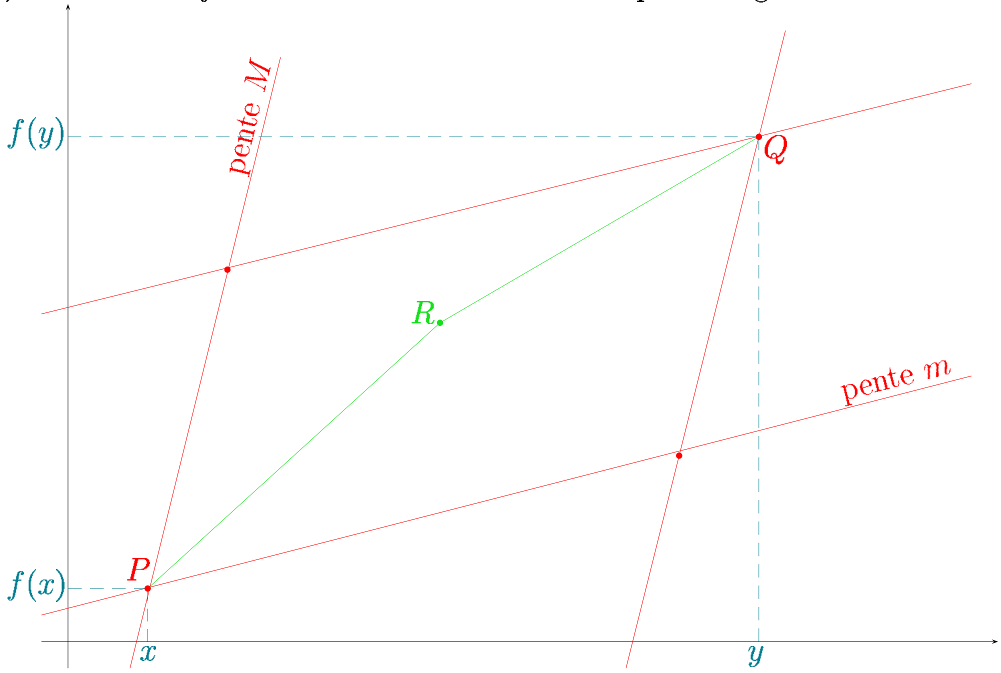
Corollaire 0.2.2.
Si f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ et s'il existe des réels m et M tels que pour tout $t \in \mathring{I}$ on ait $m \leq f'(t) \leq M$, alors pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x \neq y$ on a:

$$m \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent en remarquant que $f'(t) \leq g'(t)$ où $g(t) = Mt$ et $h'(t) \leq f'(t)$ où $h(t) = mt$. L'encadrement reste vrai même si $y < x$. ■

Remarque géométrique: Ce résultat signifie que si les pentes des tangentes à la représentation graphique sont bornées, il en est de même pour les pentes des sécantes.

En fait, la courbe de f est astreinte à rester dans un parallèlogramme:



Corollaire 0.2.3.

Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ et dont la dérivée est bornée. Alors pour tout couple $(x, y) \in I^2$ on a:

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

où $k = \sup \left\{ |f'(t)| : t \in \mathring{I} \right\}$.

Démonstration. Il suffit de prendre dans le corollaire précédent $m = -k$ et $M = k$. ■

Remarques:

- Une application $f : I \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une constante k telle que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

est dite k-lipschitzienne.

- Il est possible d'étendre ce résultat aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne: $f : I \to \mathbb{R}^n$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ et $\forall t \in \mathring{I}$, $\|f'(t)\| \leq k$, alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \cdot |x - y|.$$

Démonstration. On pose

$$\varphi(t) = \left\langle \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, f(t) \right\rangle,$$

$\varphi : I \to \mathbb{R}$ et

$$\varphi'(t) = \left\langle \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, f'(t) \right\rangle.$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)| &\leq \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\| \cdot \|f'(t)\| \\ &\leq k \cdot \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le dernier corollaire à φ:

$$\underbrace{|\varphi(x) - \varphi(y)|}_{\frac{\|f(x) - f(y)\|^2}{|x - y|}} \leq k \cdot \left\| \frac{f(y) - f(y)}{x - y} \right\| \cdot |x - y|.$$

D'où

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \cdot |x - y|.$$

■

0.3 Exemples d'applications.

0.3.1 Utilisation en calcul numérique.

Déterminons un encadrement de $\sqrt{10001}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis: Posons pour $t \geq 0$,

$$f(t) = \sqrt{t}.$$

Alors, pour $t > 0$,

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Si $x = 10000$ et $y = 10001$, alors

$$\forall t \in [x, y], \quad \frac{1}{2\sqrt{10001}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{200}.$$

Il en résulte d'après le premier corollaire que:

$$\frac{1}{2\sqrt{10001}} \leq \sqrt{10001} - 100 \leq \frac{1}{200}$$

d'où

$$100 + \frac{1}{202} \leq \sqrt{10001} \leq 100 + \frac{1}{200}.$$

Remarque: On peut recommencer le même type d'opérations, avec $x = 10001$ et $y = \left(100+\frac{1}{200}\right)^2$:

$$100+\frac{1}{200}-\frac{1}{40000+\frac{200}{101}} \leq \sqrt{10001} \leq 100+\frac{1}{200}-\frac{1}{80000+4}.$$

0.3.2 Une inégalité classique.

Propriété 0.3.1.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad |\tan x| \geq |x|.$$

Démonstration. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \tan t \end{array},$$

$f'(t) = 1+\tan^2 t$ donc pour tout t dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(t) \geq 1$.

On applique le premier corollaire entre 0 et x $\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}\right)$ et on a pour $x \neq 0$,

$$\frac{\tan 0 - \tan x}{0-x} = \frac{\tan x}{x} \geq 1$$

ce qui donne le résultat. ∎

0.3.3 Approximation de $\ln(1+x)$ par x.

Propriété 0.3.2.
Pour tout $x \geq \frac{1}{2}$,

$$|\ln(1+x) - x| \leq x^2.$$

Démonstration. Posons pour $t > -1$, $f(t) = t - \ln(1+t)$ alors

$$f'(t) = \frac{t}{1+t},$$

ainsi pour $t \geq -\frac{1}{2}$ on a: $|f'(t)| \leq 2|t|$ donc $|f'(t)| \leq g'(t)$ avec

$$g(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ -t^2 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases}.$$

On a

$$-g'(t) \leq f'(t) \leq g'(t).$$

On applique ensuite le premier théorème entre 0 et x avec $x \geq -\frac{1}{2}$. ∎

Remarques:

- Pour $t \in [0, +\infty[$, on a $0 \leq f'(t) \leq t$ et on obtient

$$0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

- L'erreur commise en remplaçant $\ln(1+x)$ par x est donc inférieure à x^2, cette approximation n'est donc utile qu'au voisinage de 0.

0.4 Appoximation du sinus.

Exercice:

1. En considérant la fonction $\varphi : t \mapsto t - \sin t$ et en calculant sa dérivée d'ordre 3, montrer que:
$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x.$$
2. Montrer de même que:
$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Démonstration. 1. $\varphi'(t) = 1 - \cos t$, $\varphi''(t) = \sin t$ et $\varphi^{(3)}(t) = \cos t$.
$\varphi' \geq 0$, φ est donc croissante et $\varphi(0) = 0$ donc pour $x \geq 0$, $\sin x \leq x$. On a $-1 \leq \varphi^{(3)}(t) \leq 1$ donc d'après le théorème entre 0 et x $(x \geq 0)$,
$$-x \leq \varphi''(x) \leq x$$
car $\varphi''(0) = 0$, en réitérant on obtient
$$-\frac{x^2}{2} \leq \varphi'(t) \leq \frac{x^2}{2}$$
et on recommence une dernière fois pour obtenir le résultat.

2. La démarche est identique avec
$$\varphi(t) = t - \frac{t^3}{3!} - \sin t$$
et en calculant $\varphi^{(5)}(t)$.

■

0.4.1 Application à la convergence d'une suite.

Exercice: En utilisant le fait que
$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$
étudier la convergence de la suite de terme général
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad \text{où } n \geq 1.$$

Démonstration. D'après l'encadrement proposé (obtenu par l'inégalité des accroissements finis), $\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
$$0 \leq \frac{k}{n^2} - \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k^2}{2n^4}.$$

Pour n fixé, en sommant pour k variant de 1 à n, on a:

$$0 \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}_{= \ln \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} \leq \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln u_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \ln u_n = \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{e}.$$

■

0.4.2 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 0.4.1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ et a un point fixe de f.
Si $|f'(a)| < 1$, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que pour tout réel α pris dans $]a-r, a+r[\cap I$ la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers a (on dit que a est un point attractif de f).

Démonstration. Soit k un réel tel que $|f'(a)| < k < 1$. La continuité de f' en a garantit l'existence d'un intervalle ouvert J_a centré en a tel que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in J_a \cap I$. Il en résulte que pour tout $t \in J_a \cap I$,

$$|f(x) - f(a)| \leq k \cdot |x-a|.$$

Or $f(a) = a$, l'intervalle $J_a \cap I$ est donc stable par f et pour tout $\alpha \in J_a \cap I$, la suite u définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a car une récurrence immédiate donne

$$|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|.$$

■

Exemple: Etudier la convergence de la suite récurrente définie par:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$