Résolution des systèmes linéaires par opération élémentaires sur les lignes. Méthode du pivot. Exemples.

Pré-requis:
◇ La définition d'un sytème linéaire de n équations à p inconnues.
◇ La représentation matricielle d'un système linéaire.

Cadre: On se place dans un corps $\mathbb{K}$.
Notations: Dans cet exposé, on notera $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq p}}$ la matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq p}}$.

Nous écrirons L_i la $i^{\text{ième}}$ ligne de A (ou $L_i(x_1, x_2, \dots, x_p)$ lorsque se sera nécéssaire) et C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.

Nous associerons toujours à la lettre n le nombre de lignes du système et à la lettre p le nombre de colonnes.

Enfin, $B = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sera toujours le second membre du système.

0.1 Les systèmes triangulaires.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des systèmes particulièrement facile à résoudre:

Définition 0.1.1.
On dira qu'un système linéaire est triangulaire supérieur lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$.

Résolution: Nous allons supposer ici que pour tout $i \in [\![1, \min(n,p)]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.

- Si $n = p$, alors L_n donne $a_{n,n}x_n = b_n$, c'est-à-dire $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$.
  Ensuite en remplaçant dans L_{n-1}, on a $a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}\frac{b_n}{a_{n,n}} = b_{n-1}$, c'est-à-dire $x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}\frac{b_n}{a_{n,n}}$.
  On remonte ainsi jusqu'à x_1 et on obtient ainsi une solution unique.
- Si $n > p$, alors on a deux cas:
  ◇ Si il existe $k \in [\![p+1, n]\!]$ tel que $b_k \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.
  ◇ Si pour tout $k \in [\![p+1, n]\!]$, $b_k = 0$, alors on est ramené au cas précèdent en partant de la $p^{\text{ième}}$ ligne.
- Si $n < p$, alors on exprime les n premières inconnues en fonction des $p - n$ dernière inconnues, c'est-à-dire écrire L_k comme suit:

$$a_{k,k}x_k + a_{k,k-1}x_{k-1} + \ldots + a_{k,n}x_n = b_k - a_{k,n+1}x_{n+1} - a_{k,n+2}x_{n+2} - \ldots - a_{k,n}x_n$$

  puis de résoudre comme dans le premier cas. On obtient alors une infinité de solutions.

Nous allons maintenant donner une méthode pour ramener un sytème linéaire quelconque à un sytème triangulaire supérieur.

0.2 La méthode du pivot de Gauss.

0.2.1 Opérations élémentaires.

✎ **Définition 0.2.1.**
On dira que le système linéaire (S) est équivalent au système (S') si ils ont les mêmes solutions.

✎ **Définition 0.2.2.**
On appelle opérations élémentaire d'un système linéaire:
- ◇ Pour $k \neq m$, l'échange de L_k et L_m, que l'on note $L_k \leftrightarrow L_m$.
- ◇ Pour $k \neq m$, le remplacement de L_k par αL_k avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$, que l'on note $L_k \leftarrow \alpha L_k$.
- ◇ Pour $k \neq m$, le remplacement de L_k par $L_k + \lambda L_m$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, que l'on note $L_k \leftarrow \alpha L_k + \lambda L_m$.

Remarque: Pour $k \neq m$, l'échange de C_k et C_m revient à changer l'ordre des inconnues.

✎ **Théorème 0.2.3.**
On passe d'un système linéaire (S) à un système linéaire (S') équivalent:
(i) En supprimant dans (S) une ligne parmis deux égales.
(ii) En effectuant une opération élémentaire.

Démonstration. (i) C'est évident.
(ii) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ une solution de (S) et $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p)$ une solution de (S').
- ◇ Il est évident qu'échanger deux lignes d'un système ne change pas les solutions du système initial.
- ◇ Effectuons $L_k \leftarrow \alpha L_k$, nous obtenons ainsi un système (S'). Nous obtenons,
$$\alpha L_k(x_1, x_2, \dots, x_p) = \alpha b_k,$$
or $L_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = b_k$ donc $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ est encore solution de (S').
Dans (S'), on a
$$\alpha L_k(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p) = \alpha b_k,$$
alors d'après ce qui viens d'être démontré, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p)$ est encore solution du système obtenu en effectuant $L_k \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_k$ qui n'est autre que le système (S).
- ◇ Effectuons $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_m$, nous obtenons alors un système (S'). Ainsi,
$$(L_k + \lambda L_m)(x_1, x_2, \dots, x_p) = b_k + \lambda b_m,$$
or $L_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = b_k$ et $L_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = b_m$ d'où
$$(L_k + \lambda L_m)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = b_k + \lambda b_m,$$
donc $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ est encore solution de (S').
Dans (S'), on a
$$(L_k + \lambda L_m)(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p) = b_k + \lambda b_m,$$
alors d'après ce qui viens d'être démontré, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p)$ est encore solution du système obtenu en effectuant $L_k \leftarrow L_k - \lambda L_m$ qui n'est autre que le système (S).

■

0.2.2 La méthode du pivot de Gauss.

La méthode de Gauss est en fait un algorithme qui permet de trouver un système triangulaire en partant d'un système linéaire quelconque:

1. Soit L_k telle que $a_{k,1} \neq 0$ ($a_{k,1}$ est alors appelé un pivot).

$$L_1 \leftrightarrow L_k.$$

2. On élimine x_1 dans L_2, L_3, $\ldots$, L_n, en effectuant, pour $i \in [\![2, n]\!]$:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1.$$

3. On pose $j = 2$.
3. Pour $k \geq j$, si il existe L_k telle que $a_{k,j} \neq 0$, on effectue $L_j \leftrightarrow L_k$, sinon on arrête.
4. On élimine x_j dans L_{j+1}, L_{j+2}, $\ldots$, L_n, en effectuant, pour $i \in [\![j+1, n]\!]$:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}} L_j.$$

5. On reprend à l'étape 3. en posant $j = j + 1$.

Cet algorithme aboutit toujours, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de lignes et on obtient bien un système triangulaire supérieur sans élément diagonal nul.

0.3 Exemples d'illustrations.

Voici les différentes situations présentées précèdemment:

-
$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 7 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc|cl} 0 & 6 & 10 & 8 & L_1 \\ 7 & 5 & 5 & 4 & L_2 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & L_3 \\ 7 & -1 & -3 & 1 & L_4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{7} & 5 & 5 & 4 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 0 & 6 & 10 & 8 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & L_3 \\ 7 & -1 & -3 & 1 & L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{7} & 5 & 5 & 4 & L_1 \\ 0 & \boxed{6} & 10 & 8 & L_2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{7} & 5 & 5 & 4 & L_1 \\ 0 & \boxed{6} & 10 & 8 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 0 & 6 & 10 & 8 & L_1 \\ 7 & 5 & 5 & 4 & L_2 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & L_3 \\ 7 & -1 & -3 & 1 & L_4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{7} & 5 & 5 & 4 & L_1 \\ 0 & \boxed{6} & 10 & 8 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \end{array}$$

Donc $\mathcal{S} = \emptyset$. ■

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} :$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 8 & 5 & 8 & L_1 \\ -1 & 7 & 1 & 7 & L_2 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & L_3 \\ 1 & 10 & 7 & 10 & L_4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 8 & 5 & 8 & L_1 \\ 0 & 15 & 6 & 15 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 8 & 5 & 8 & L_1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 0 & 15 & 6 & 15 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 8 & 5 & 8 & L_1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 8 & 5 & 8 & L_1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 8 & 5 & 8 & L_1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_3 \end{array}$$

D'où $\mathcal{S} = \{(0, 1, 0)\}$. ■

•

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 11 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} :$$

Démonstration.

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{6} & 5 & 4 & 5 & 3 & L_1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 3 & L_2 \\ 11 & 5 & 8 & 9 & 5 & L_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|cl} \boxed{6} & 5 & 4 & 5 & 3 & L_1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ 0 & -\frac{25}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{6}L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cl} \boxed{6} & 5 & 4 & 5 & 3 & L_1 \\ 0 & \boxed{5} & -8 & 2 & 3 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ 0 & -25 & 4 & -1 & -3 & L_3 \leftarrow 6L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cl} \boxed{6} & 5 & 4 & 5 & 3 & L_1 \\ 0 & \boxed{5} & -8 & 2 & 3 & L_2 \\ 0 & 0 & -36 & 9 & 12 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cl} \boxed{6} & 5 & 4 & 5 & 3 & L_1 \\ 0 & \boxed{5} & -8 & 2 & 3 & L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} & 3 & 4 & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array}$$

Ainsi en exprimant x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4, on obtient: $x_3 = \frac{3x_4-4}{12} = \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3-2x_4+8\cdot\frac{3x_4-4}{12}}{5} = \frac{1}{15}$ et $x_1 = \frac{3-5x_4-4\cdot\frac{3x_4-4}{12}-5\cdot\frac{1}{15}}{6} = \frac{2}{3} - x_4$. Donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2}{3} - x_4, \frac{1}{15}, \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{3}, x_4 \right) \middle| \, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Exercices: Chercher l'intersection des trois plans P_1, P_2, P_3 passant par les points:

1. $P_1 : (1,1,-2), (2,1,-5), (-2,0,8)$
   $P_2 : \left(0,3,\frac{1}{2}\right), \left(-1,4,\frac{5}{2}\right), \left(3,-5,\frac{-1}{2}\right)$
   $P_3 : (0,1,5), (1,2,-1), (-2,3,11)$
2. $P_1 : (2,1,-1), (3,5,-5), (1,4,-3)$
   $P_2 : (1,3,-2), (-1,3,-1), (2,6,-5)$
   $P_3 : (1,2,-1), (-2,0,2), (5,2,-3)$
3. $P_1 : (1,4,0), (-2,5,2), (3,2,-1)$
   $P_2 : (1,5,-2), (2,4,-2), (3,3,-2)$
   $P_3 : (1,1,2), (1,-1,0), (-6,4,14)$
4. $P_1 : \left(0,0,\frac{1}{2}\right), (-1,2,1), (1,2,-2)$
   $P_2 : (0,1,0), (1,4,-3), (2,1,-3)$
   $P_3 : (1,6,-4), (-2,3,2), (4,1,-6)$

Réponses:

1. $P_1 : 3x + y + z = 2$
   $P_2 : 6x + 2y + 2z = 7$ et $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$.
   $P_3 : 9x + 3y + 3z = 13$
2. $P_1 : 4x + 6y + 7z = 7$
   $P_2 : 3x + 5y + 6z = 6$ et $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{(0,0,1)\}$.
   $P_3 : 2x + 3y + 4z = 4$

3. $\begin{array}{l} P_1 : 3x + y + 4z = 7 \\ P_2 : 3x + 3y + 5z = 8 \\ P_3 : 9x - 7y + 7z = 16 \end{array}$ et l'intersection recherchée est la droite d'equation $3x - 7y = 3$.

4. On obtient que les trois plans sont confondus et leur equation est: $3x + y + 2z = 1$.