Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre; effet sur les distances, conservation des angles orientés. Similitudes directes. Écriture complexe. Groupe des similitudes directes.

Pré-requis:

- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine du plan (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- ◇ Définition et principales propriétés d'une application affine.
- ◇ L'identification de $\mathbb{C}$ au plan vectoriel euclidien (En particulier, l'interprétation géométrique du module et de l'argument).
- ◇ Définition de déplacement (En particulier, les rotations) et d'homothétie (Avec la connaissance de leurs formes complexes et qu'elles sont des applications affines qui conserve les angles orientés).

- ◇ Notion de groupe, d'angle orienté de vecteurs.
- ◇ La définition d'une transformation du plan.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ de plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Notations: Dans cet exposé, on notera $H_{I,k}$ l'homothétie de centre I et de rapport k ($k \in \mathbb{R}_+^*$) et $R_{I,\theta}$ la rotation de centre I et d'angle θ.

Remarque: On se limite à un rapport strictement positif car on va étudier les produits de la forme $H_{I,k} \circ R_{O,\theta}$, or $H_{I,-k} \circ R_{O,\theta} = H_{I,k} \circ R_{O,\theta+\pi}$.

0.1 Les similtudes directes.

Théorème 0.1.1.

La composée $H_{I,k} \circ R_{O,\theta}$ est une transformation du plan qui multiplie les distances par k et conserve les angles orientés. Lorsque $I = O$, ce produit est commutatif.

Démonstration. Les applications $H_{I,k}$ et $R_{O,\theta}$ ayant pour inverse respectifs $H_{I,\frac{1}{k}}$ et $R_{I,-\theta}$, $(H_{I,k} \circ R_{O,\theta})^{-1} = R_{O,-\theta} \circ H_{I,\frac{1}{k}}$, c'est donc une transformation du plan. De plus, $H_{I,k}$ multiplie les distances par k alors que $R_{O,\theta}$ les conservent, ainsi leur produit multiplie les distances par k. De plus, $H_{I,k}$ et $R_{O,\theta}$ conservent les angles orientés et par conséquent leur produit aussi.

Pour $I = O$, $H_{I,k} \circ R_{I,\theta}(I) = R_{I,\theta} \circ H_{I,k}(I) = I$. Soit $M \neq I$ un point du plan, $H_{I,k} \circ R_{I,\theta} =$

$H_{I,k}(M')$ avec $IM = IM'$ et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = \theta[2\pi]$. $H_{I,k}(M') = M''$ avec $\overrightarrow{IM''} = k\overrightarrow{IM'}$, ainsi

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM''}\right) = \theta[2\pi] \quad \text{et} \quad IM'' = kIM.$$

De plus, $R_{I,\theta} \circ H_{I,k}(M) = R_{I,\theta}(M_1)$ avec $\overrightarrow{IM_1} = k\overrightarrow{IM}$ et $R_{I,\theta}(M_1) = M_2$ avec $IM_1 = IM_2$ et $\left(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM_2}\right) = \theta[2\pi]$, c'est-à-dire

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM_2}\right) = \theta[2\pi] \quad \text{et} \quad IM_2 = kIM,$$

alors $M'' = M_2$. ■

Définition 0.1.2.
Une application f du plan est une similitude directe si elle multiplie les distances par $k \in \mathbb{R}_+^*$ et conserve les angles orientés. On dira que k est le rapport de l'homothétie.

Notation: L'ensemble des similitudes directes sera noté $\mathrm{Sim}^+(\mathcal{P})$.

Remarques: Tout déplacement du plan est une similitude directe de rapport 1. Toute homothétie affine de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème 0.1.3.
Toute similitude directe de rapport k est, d'une infinité de façons, le produit d'un déplacement par une homothétie de rapport k.

Démonstration. Le produit de deux similitudes directes de rapports k et k' multiplie les distances par kk' et conserve les angles orientés; c'est donc encore une similitude directe.

Soit f une similitude directe de rapport k, par ce qui précède, $f \circ H_{I,\frac{1}{k}}$ est une similitude directe de rapport $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, c'est donc un déplacement g. Ainsi, $f = g \circ H_{I,k}$. ■

Conséquence: Une similitude directe est une application affine.

Corollaire 0.1.4.
L'ensemble $\mathrm{Sim}^+(\mathcal{P})$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Démonstration. L'ensemble $\mathrm{Sim}^+(\mathcal{P})$ est non vide car il contient l'identité, qui est neutre pour la loi de composition. De plus, le produit de deux similitudes directes est encore une similitude directe. De plus, une similitude directe est inversible puisqu'elle s'écrit comme composée de deux transformations. ■

0.2 Forme complexe des similitudes directes.

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ sera muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Théorème 0.2.1.
Les similitudes directes de $\mathcal{P}$ sont les applications dont la forme complexe est du type $z \mapsto az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $|a|$ est égal au rapport de la similitude.

Démonstration. On sait qu'une similitude directe f est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement. La forme complexe de cette homothétie est du type $z \mapsto kz+\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et celle du déplacement est du type $z \mapsto e^{i\theta}z+\beta$ avec $\beta \in \mathbb{C}$. Par composition, on en déduit que f s'écrit $z \mapsto az+b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $|a| = k$.

Inversement, soit f une transformation plane dont la forme complexe est celle proposée par l'énoncé. On peut écrire $a = ke^{i\theta}$, ainsi f est la composée de $z \mapsto kz$ par $z \mapsto e^{i\theta}z+b$, f est donc la composée d'une similitude de rapport k et d'un déplacement, c'est donc une similitude directe de rapport $k = |a|$. ∎

Proposition 0.2.2.
Soit $s : z \mapsto az+b$, $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, une similitude directe de rapport $|a|$ et Ω le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

- Si $a = 1$, alors s est une translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$, alors $s = R_{\Omega,\theta}$.
- Si $|a| \neq 1$, alors $s = H_{\Omega,|a|} \circ R_{\Omega,\arg(a)}$.

Dans les deux dermiers cas, on dira que s est une similitude de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Démonstration. Le premier point est évident et les deux derniers peuvent être traités en même temps: pour $a \neq 1$, l'équation $f(\omega) = \omega$ possède une unique solution $\omega = \frac{b}{1-a}$, ce qui montre que Ω est l'unique point fixe de f. Alors la relation $z' = az+b$ et l'égalité $\omega = a\omega+b$ équivalent à la relation $(z'-\omega) = a(z-\omega)$ soit encore,

$$\begin{cases} |z'-\omega| = |a| \cdot |z-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \arg(a)[2\pi] \end{cases}.$$

En terme de points M et M' d'affixe respectives z et z', cela s'écrit

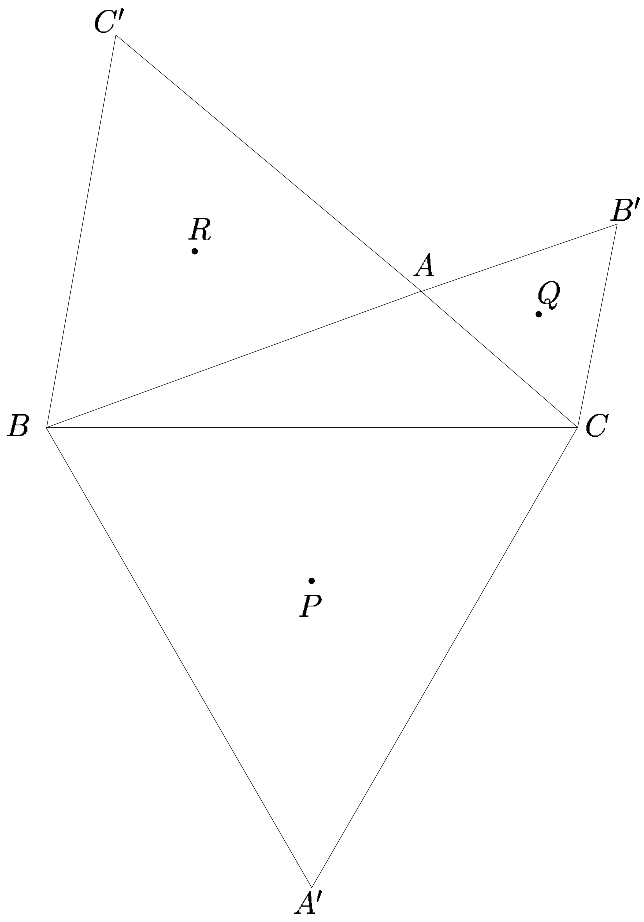
$$\begin{cases} \Omega M' = |a| \cdot \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv \arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

et cela signifie que M' est l'image de M par la composée $H_{\Omega,|a|} \circ R_{\Omega,\arg(a)}$. ∎

0.3 Application.

Le triangle de Napoléon.

Soit ABC un triangle quelconque. On construit les triangles équilatéraux directs CBA', ACB' et BAC' d'isobarycentre respectifs P, Q et R. Alors PQR est un triangle équilatéral.



Démonstration. Soit $R_{B,\frac{\pi}{3}}$. Comme $AC'B$ est équilatérale, $R_{B,\frac{\pi}{3}}(A) = C'$ et $R_{B,\frac{\pi}{3}}(A') = C$, alors $AA' = CC'$. En considérant, $R_{A,\frac{\pi}{3}}$, $CC' = BB'$.

En considérant la similitude $s_{C,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\pi}{6}}$ et en remarquant que dans un triangle équilatéral, les bissectrices sont également médianes du triangle, alors $s_{C,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\pi}{6}}(A) = Q$ et $s_{C,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\pi}{6}}(A') = P$ d'où $QP = \frac{\sqrt{3}}{3}AA'$. En condidérant succesivement $s_{A,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\pi}{6}}$ et $s_{B,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\pi}{6}}$, on a $RQ = \frac{\sqrt{3}}{3}BB'$ et $PR = \frac{\sqrt{3}}{3}CC'$, d'où le résultat. ∎