Représentation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$ où a et b sont des nombres complexes. Exemples d'applications à l'étude de configurations géométriques du plan.

Cadre: On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pré-requis:
- ◇ Notion de nombre complexes, en particulier son écriture algèbrique et exponentielle, son conjugué, son module et son argument.
- ◇ Définitions de rotation, translation, homothétie et réflexion du plan.

0.1 Représentation géométrique des nombres complexes.

Nous allons identifier le corps des complexes au plan euclidien $\mathcal{P}$ (muni du repère $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$), pour cela nous devons associer à tout nombre complexe, un et un seul point de $\mathcal{P}$:

Définition 0.1.1.
Soient a et b deux nombres réels et l'application bijective

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & z = a+ib & \longmapsto & M(a,b) \end{array}.$$

Le point M est appelé l'image de z et z l'affixe de M.

Remarque: En choisissant O pour considérer l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}_O}$ associé à $\mathcal{P}$, on a directement la même définition pour les vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}_O}$, c'est-à-dire: si $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $z = a+ib$ est l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}$ est appelé le vecteur image de z.

Notation: On notera M d'affixe z par $M(z)$ et $\overrightarrow{w}$ d'affixe z par $\overrightarrow{w}(z)$.

Conséquences:
- Un nombre z est réel si, et seulement si le point M est sur l'axe des abscisses.
- Un nombre z est imaginaire pur si, et seulement si le point M est sur l'axe des ordonnées.

Regardons maintenant les significations géométriques du module et de l'argument d'un nombre complexe:

Proposition 0.1.2.
Soient $M(z)$ et $M(z')$ deux points du plan $\mathcal{P}$.

- $\mathrm{d}(O, M) = |z|$.
- $\mathrm{d}(M, M') = |z' - z|$.
- $\arg(z) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$.
- $\arg(z' - z) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MM'}\right) [2\pi]$ pour $z \neq z'$.

Conséquences: Pour $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ quatre points distincts du plan $\mathcal{P}$:

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}\right).$$

0.2 Interprétation géométrique de quelques applications élémentaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Le corps des complexes étant identifié au plan $\mathcal{P}$, toute application de $\mathbb{C}$ dans lui-même se traduit par une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même:

Proposition 0.2.1.

(i) La transformation du plan correspondant à l'application $z \mapsto \overline{z}$ est la réflexion d'axe (Ox).
(ii) La transformation du plan correspondant à l'application $z \mapsto a + z$ $(a \in \mathbb{C})$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe a.
(iii) La transformation du plan correspondant à l'application $z \mapsto \lambda z$ avec λ un réel non nul et distinct de 1 est une homothétie de centre O et de rapport λ.

Nous allons maintenant étudier la transformation du plan correspondant à l'application $z \mapsto az$ où a est un complexe. On écrit:

$$a = \rho \cdot e^{i\theta} \quad \text{où } |a| = \rho \text{ et } \arg a \equiv \theta[2\pi].$$

Définition 0.2.2.
Soient h l'homothétie de centre O, de rapport ρ et r la rotation de centre O et d'angle θ. La transformation $\sigma = h \circ r = r \circ h$ s'appelle une similitude directe de centre O, de rapport ρ et d'angle θ.

Théorème 0.2.3.
En utilisant les notations de la définition précédente, la transformation du plan correspondant à l'application $z \mapsto \rho e^{i\theta} z$ est une similitude directe de centre O, de rapport ρ et d'angle θ.

Démonstration. Soit $z' = \rho e^{i\theta} z$ et $M'(z')$, $M(z)$.

Regardons tout d'abord l'application $z \mapsto e^{i\theta} z$, en notant $z_1 := e^{i\theta} z$. On a immédiatement $|z_1| = |z|$ donc l'application recherchée est une isométrie, de plus elle fixe $O(0)$ et c'est le seul point fixe (en effet, pour $z \neq 0$, $z = e^{i\theta}z$ si, et seulement si $e^{i\theta} = 1$); c'est donc une rotation. De plus, $\arg(z_1) \equiv \theta + \arg(z)[2\pi]$ donc

$$\arg\left(\frac{z_1}{z}\right) \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}\right) \equiv \theta[2\pi],$$

par conséquent M_1 est l'image de M par une rotation r de centre O et d'angle θ.

De plus, $z' = \rho z_1$ donc M' est l'image de M_1 par une homothétie h de centre O et de rapport ρ, d'où M' est l'image de M par $h \circ r$. ∎

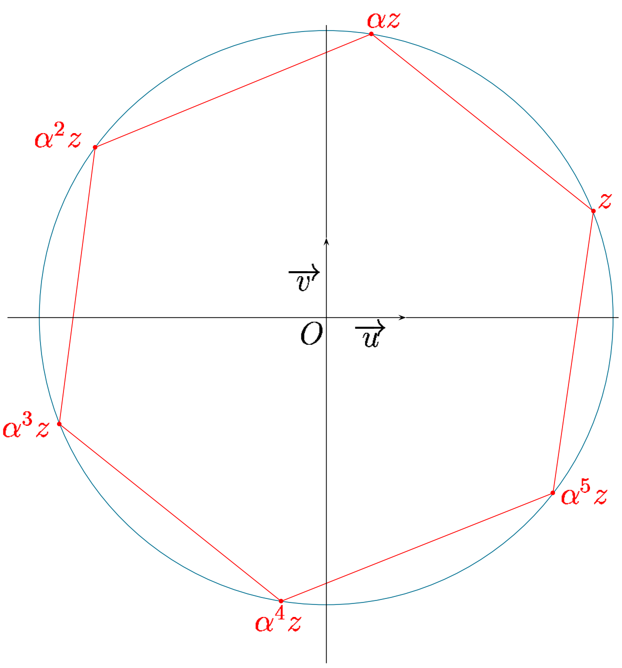
Remarque: La transformation du plan correspondant à l'application $z \mapsto az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq 1$ est une similitude directe de centre $\omega = \frac{b}{1-a}$.

En effet, en posant $Z = z - \omega$, on est ramené à étudier $Z \mapsto aZ$.

0.3 Exemples d'application.

0.3.1 Les polygones réguliers.

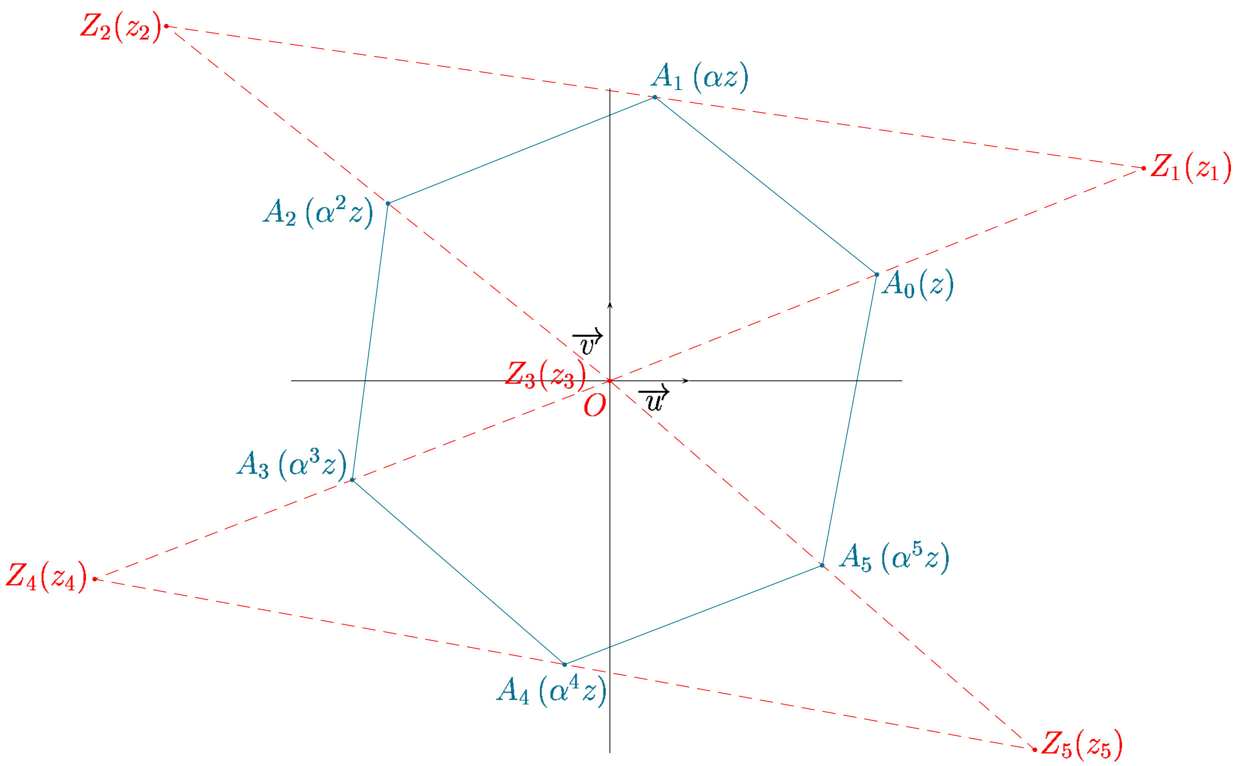
Pour $z \neq 0$, et α un nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{n}$ modulo 2π, les points d'affixes z, αz, $\alpha^2 z$, ..., $\alpha^{n-1}z$ sont les sommets d'un polygone régulier centré en O.



Exercice: Soit P_n un polygone régulier à $2n$ côtés de sommets $A_0(z)$, $A_1(\alpha z)$, ..., $A_k\left(\alpha^k z\right)$, ..., avec $\alpha = e^{i\frac{\pi}{n}}$ (étant entendu que $A_q = A_p$ si $q \equiv p[2n]$).

Soient $(Z_k(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points telle que $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel k, Z_{k+1} est le symétrique de Z_k par rapport à A_k.

Montrer que $\{z_k | k \in \mathbb{N}\}$ est fini.



Démonstration. Le point Z_{k+1} étant le symétrique de Z_k par rapport A_k, Z_{k+1} se déduite de Z_k par une translation de vecteur $2\overrightarrow{Z_kA_k}$, ce qui se traduit en complexe par:

$$z_{k+1} = z_k + 2\left(\alpha^k z - z_k\right) = 2\alpha^k z - z_k.$$

Ainsi, pour tout entier naturel k,

$$z_{k+1} + z_k = 2\alpha^k z.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{2n} (z_i + z_{i-1}) = 2z \cdot \sum_{i=1}^{2n} \alpha^{i-1} = 2z \cdot \sum_{i=0}^{2n-1} \alpha^i = 2z \cdot \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} (z_i + z_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{2n} z_i + \sum_{i=1}^{2n} z_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} z_i + \sum_{j=0}^{2n-1} z_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{2n-1} z_i + z_{2n} \quad (\text{Car } z_0 = 0)
\end{aligned}$$

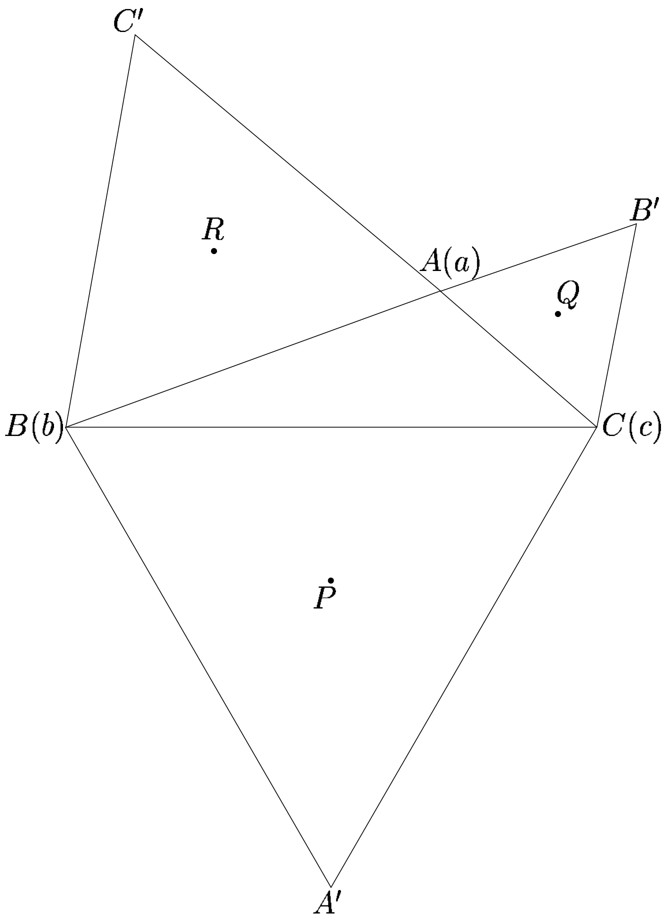
et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n-1} z_i &= \underbrace{z_1}_{=2z} + \sum_{i=2}^{2n-1} z_i \\
&= 2z + \sum_{j=1}^{2n-2} z_{j+1} \\
&= 2z + \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{(z_{2j} + z_{2j+1})}_{=2\alpha^{2j} z} \\
&= 2z \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha^2)^j \\
&= 2z \cdot \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} \\
\sum_{i=1}^{2k-1} z_i &= 0.
\end{aligned}$$

Donc $z_{2n} = 0 = z_0$ et $z_{2n+1} = 2\alpha^{2n} z = 2z = z_1$. ■

0.3.2 Le triangle de Napoléon.

Soit ABC un triangle quelconque. On construit les triangles équilatéraux directs CBA', ACB' et BAC' d'isobarycentre respectifs P, Q et R. Alors PQR est un triangle équilatéral.



Démonstration. Soit $r_{B,\frac{\pi}{3}}$ la rotation de centre $B(b)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ainsi,

$$r_{B,\frac{\pi}{3}} : z \longmapsto e^{i\frac{\pi}{3}}z + \alpha_b$$

où α_b vérifie $e^{i\frac{\pi}{3}}b + \alpha_b = b$ c'est-à-dire $\alpha_b = b \cdot \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$.

Or $r_{B,\frac{\pi}{3}}(A) = C'$ car BAC' est équilatéral direct donc $C'\left(e^{i\frac{\pi}{3}}a + \alpha_b\right)$. On a de même, en considérant $r_{A,\frac{\pi}{3}}$ et $r_{C,\frac{\pi}{3}}$, $B'\left(e^{i\frac{\pi}{3}}c + \alpha_a\right)$ et $A'\left(e^{i\frac{\pi}{3}}b + \alpha_c\right)$.

En utilisant le fait que dans un triangle équilatéral les bissectrices intérieures et les médiatrices sont confondues, on a: Q est l'image de A par une similitude directe de centre $C(c)$, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ que nous noterons $s_{C,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{6}}$. Ainsi,

$$s_{C,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{6}} : z \longmapsto \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z + \beta_c \quad \text{où } \beta_c = c\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right),$$

donc

$$Q\left(\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}a + \beta_c\right).$$

De la même manière, on a $s_{C,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{6}}(A') = P$, donc

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + \alpha_c\right) + \beta_c\right).$$

Ainsi, en notant z_P et z_Q les affixes de P et Q, on a:

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= (z_Q - z_P) \cdot (\overline{z_Q} - \overline{z_P}) \\
&= \frac{1}{3}\left(a - e^{i\frac{\pi}{3}} b - c\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) \cdot \left(\overline{a} - e^{-i\frac{\pi}{3}} \overline{b} - \overline{c}\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a\overline{a} - e^{-i\frac{\pi}{3}} a\overline{b} - a\overline{c} + e^{-i\frac{\pi}{3}} a\overline{c} - e^{i\frac{\pi}{3}} b\overline{a} + b\overline{b} + e^{i\frac{\pi}{3}} b\overline{c} - b\overline{c} - c\overline{a} + e^{i\frac{\pi}{3}} c\overline{a} + e^{-i\frac{\pi}{3}} c\overline{b}\right. \\
&\quad \left. - c\overline{b} - c\overline{c}\right)
\end{aligned}$$

car $\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \cdot \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 1$.

De la même façon que précédemment, on a: $s_{A, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}}(C') = R$ et $s_{A, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}}(C) = Q$ donc

$$R\left(\frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} a + \alpha_b\right) + \beta_a\right) \text{ et } Q\left(\frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} c + \beta_a\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
RQ^2 &= \frac{1}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} a + b\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - c\right) \cdot \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \overline{a} + \overline{b}\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) - \overline{c}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a\overline{a} + e^{i\frac{\pi}{3}} a\overline{b} - a\overline{b} - e^{i\frac{\pi}{3}} a\overline{c} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \overline{a}b - \overline{a}b + b\overline{b} - b\overline{c} + e^{i\frac{\pi}{3}} b\overline{c} - e^{-i\frac{\pi}{3}} \overline{a}c - \overline{b}c\right. \\
&\quad \left. + e^{-i\frac{\pi}{3}} \overline{b}c + c\overline{c}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$RQ^2 - PQ^2 = \frac{1}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1\right)\left(a\overline{b} + \overline{a}b - a\overline{c} - \overline{a}c - b\overline{b} + c\overline{c}\right)$$

or $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = 0$ donc

$$RQ = PQ.$$

En utilisant $s_{B, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}}$ on a de la même manière, $PR = PQ$ donc PQR est un triangle équilatéral.

■