Réflexions et rotations du plan. Invariants élémentaires: effet sur les distances, l'alignement, les angles. Application à l'action sur les configurations usuelles. (Version longue).

Pré-requis:

- Définitions de droite, demi-droite et segment.
- Définitions de produit scalaire et de norme.
- Définition et principales propriétés d'une application orthogonale:
  On dit que $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ est orthogonale lorsqu'elle conserve le produit scalaire, c'est-à-dire:
  $$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^2, \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}.$$
  Une application linéaire $\overrightarrow{f}$ est orthogonale si, et seulement si elle transforme une base orthonormée quelconque en une base orthonormée. On dira alors qu'elle est directe (ou indirecte) suivant qu'elle conserve (ou pas) l'orientation de la base.
-

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ de plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Notation: Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'application, on notera toujours X' l'image d'un point X par cette application.

0.1 Réflexion et rotation du plan.

Définition 0.1.1.
Une application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même est une isométrie si, pour tout couple (M, N) de points de $\mathcal{P}$, la distance MN est égale à la distance $M'N'$.

Théorème 0.1.2.
Toute isométrie de $\mathcal{P}$ est injective et transforme un segment (respectivement une demi-droite, une droite) en un segment (respectivement une demi-droite, une droite).

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'une isométrie f est injective: Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$ vérifiant $M' = N'$ alors $0 = M'N' = MN$ car f est une isométrie et par conséquant $M = N$.

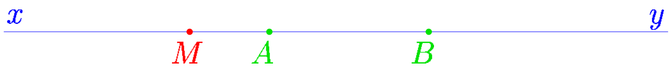
Montrons maintenant que f envoie un segment sur un segment; la conservation des distances permet d'écrire:

$$\begin{array}{rcl} M \in [AB] & \Rightarrow & AM + MB = AB \\ & \Rightarrow & A'M' + M'B' = A'B' \\ M \in [AB] & \Rightarrow & M' \in [A'B'] \end{array}$$

d'où $f([AB]) \subset [A'B']$.

Réciproquement, soit N un point de $[A'B']$, il vérifie $A'N + NB' = A'B'$ et est entièrement déterminé par la donnée de la distance $A'N$. Soit M un point de $[AB]$ tel que $A'N = AM$ (il existe car $A'N \leq A'B' = AB$). D'après les implications précédentes, $M' \in [A'B']$ et $A'M' = AM = A'N$, donc $M' = N'$. Par conséquent, $f([AB]) = [A'B']$.

Considérons maintenant la droite (AB):



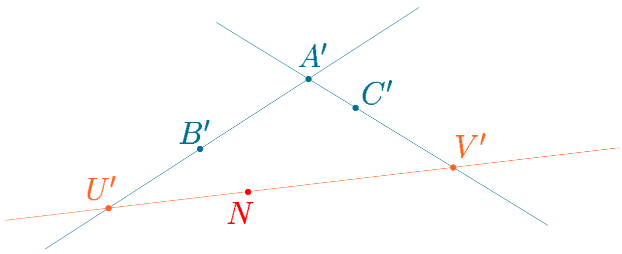
Remarquons que $M \in [Ax)$ si, et seulement si $A \in [MB]$. D'après ce qui précède, c'est equivalent à dire que $A' \in [M'B']$ c'est-à-dire $M' \in [A'x')$ d'où $f([Ax)) = [A'x')$.

On démontre de même que $f([Ay)) = [A'y)$ donc $f((AB)) = (A'B')$. ∎

Corollaire 0.1.3.

Toute isométrie de $\mathcal{P}$ est bijective.

Démonstration. Soit A, B, C trois points de $\mathcal{P}$ non alignés. Le triangle $A'B'C'$ n'est pas aplati, sinon on aurait, par exemple, $A'B' + B'C' = A'C'$ d'où on en déduirait par conservation des distances que $AB + BC = AC$ ce qui impliquerait l'alignement de A, B, C.



Soit N un point de $\mathcal{P}$ distinct de A, B et C. Choisissons une droite Δ qui coupe $(A'B')$ et $(A'C')$ en deux points distincts U' et V'. Les points U' et V' appartiennent à l'image de f car ils appartiennent à $(A'B')$ et $(A'C')$ qui d'après la proposition précédente sont les images par f de (AB) et (AC). Toujours d'après la proposition précédente, $f([UV]) = [U'V']$, or $N \in [U'V']$, donc il appartient à l'image de f, ce qui prouve que f est surjective. Comme f est injective (proposition précédente) alors f est bijective. ∎

Théorème 0.1.4.

Les isométries f de $\mathcal{P}$ sont les applications affines dont la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une application orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Démonstration. Soit I le milieu de $[AB]$, alors $IA = IB = \frac{AB}{2}$. Par conservation des distances, $f(I)f(A) = f(I)f(B) = \frac{f(A)f(B)}{2}$ et par conséquent, $f(I)$ est le milieu de $[f(A)f(B)]$, ce qui prouve que f conserve les milieux (On aurait pu se passer de la dernière égalité en signalant que f conserve l'alignement). Si l'application vectorielle $\overrightarrow{f}$ associée à f existe, elle doit vérifier pour tout couple (M, N) de $\mathcal{P}$ la relation $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$, il faut donc vérifier que l'application $\overrightarrow{f}$ est bien définie; autrement dit, si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$ ce qui signifie géométriquement, que f conserve les parallélogrammes, or de tels quadrilatères sont caractérisés par le fait que leurs diagonales ont le même milieu et par conséquent, la conservation des milieux implique la conservation du parallélogramme. Donc $\overrightarrow{f}$ est bien définie. Montrons maintenant qu'elle est additive:

$$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathcal{P}}^2,\quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

Soient A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}$, alors

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{A'C'}$$

et

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'},$$

ce qui montre que $\overrightarrow{f}$ est additive.

Afin de voir si f est affine il nous reste plus qu'à vérifier que $\overrightarrow{f}$ est homogène: l'égalité $MN=M'N'$ signifie que $\overrightarrow{f}$ conserve la norme, c'est-à-dire que $\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\left\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right\|=\|\overrightarrow{u}\|$. Comme le produit scalaire est lié à la norme par la relation $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2)$, cela entraine que $\overrightarrow{f}$ conserve le produit scalaire; $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathcal{P}}^2$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. Montrons maintenant que pour tout $(\lambda,\overrightarrow{u})\in\mathbb{R}\times\mathcal{P}$, $\left\|\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})-\lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right\|^2=0$. En effet,

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})-\lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})\right\|^2-2\left(\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})\cdot\left(\lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right)\right)+\left\|\lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right\|^2\\
&= \lambda^2\|\overrightarrow{u}\|-2\lambda\left(\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right)+\lambda^2\|\overrightarrow{u}\|^2\\
&= 2\lambda^2-2\lambda\left((\lambda\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{u}\right)\\
\left\|\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})-\lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right\|^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition d'une norme, $\overrightarrow{f}$ est homogène.

En conclusion, l'application $\overrightarrow{f}$ est linéaire et orthogonale: f est affine de partie linéaire $\overrightarrow{f}$. ∎

Remarque: On dira que l'isométrie f est un déplacement (respectivement un antidéplacement) lorsque $\overrightarrow{f}$ est directe (respectivement indirecte).

Définition 0.1.5.

- Un antidéplacement possèdant au moins deux points fixes est appelé une reflexion.
- Un déplacement possèdant au moins un point fixe est appelé une rotation.

0.2 Invariants élémentaires.

Puisque une isométrie est une application affine, elle conserve le parallélisme, l'orthogonalité et les barycentres. Voyons plus en détail les invariants élémentaires des réflexions et des rotations.

Propriétés 0.2.1.
Soient A, B, C, D quatres points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

- Une réflexion inverse les angles orientés de vecteurs et de droites;
$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) [2\pi]$$
et
$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) [\pi].$$
- Une rotation conserve les angles orientés de vecteurs et de droites;
$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) [2\pi]$$
et
$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) [\pi].$$

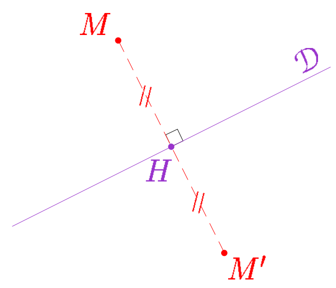
Démonstration. Ceci provient directement du fait que l'application vectorielle associée est directe ou indirecte. ■

Remarque: Pour une isométrie du plan, le fait d'être directe ou indirecte peut être formulé en termes de conservation ou inversion de l'orientation ou en termes de conservation ou inversion des angles orientés. Il n'en va pas de même dans l'espace car il n'y a pas d'angles orientés: la notion de déplacement et d'antidéplacement ne s'y formule qu'en termes de conservation ou inversion de l'orientation de l'espace.

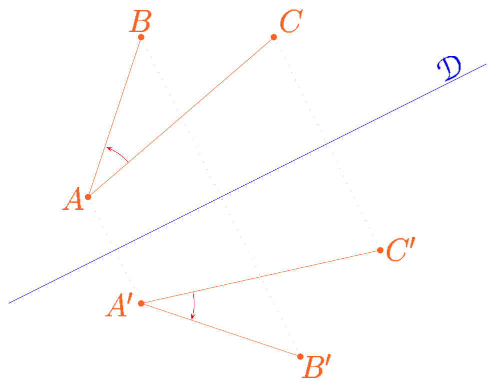
Théorème 0.2.2.
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & M & \longmapsto & M' \end{array}$$

tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, est une reflexion du plan. On dira alors que c'est une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et on la notera $s_{\mathcal{D}}$.



Démonstration. L'application f est un antidéplacement; elle transforme un angle de vecteur en son opposé; En effet,



Par la relation de Chasles, on a:

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) &= \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)+\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{B'B}\right)\\
&\qquad +\left(\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\\
&= \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)+\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'A}\right)\\
&\qquad +\left(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\\
&= \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)+\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{AA'}\right)\\
&\qquad +\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]\\
&= -\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)-\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]\\
\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) &= -\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)-2\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi].$$

De plus, la projection orthogonal d'un point M de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ est M; donc $\mathcal{D}$ est un ensemble de points fixes de f, en particulier f possède au moins deux points fixes. ■

Théorème 0.2.3.

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, alors il existe une unique droite $\mathcal{D}$ telle que la reflexion par rapport à $\mathcal{D}$ échange A et B.
Cette droite est appelée la médiatrice du segment $[AB]$. De plus, la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points equidistants de A et de B.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une telle droite, elle est perpendiculaire à la droite (AB) et, d'apès la caractérisation vectorielle d'une réflexion, elle contient le milieu I du segment $[AB]$; c'est donc la perpendiculaire à (AB) passant par I.

Réciproquement, la perpendiculaire à (AB) passant par I est bien un axe de réflexion échangeant A et B.

Soit M un point vérifiant $MA = MB$, c'est équivalent à dire que $MA^2 - MB^2 = 0$ soit encore,

$$0=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{MI}$$

où I est le milieu de $[AB]$. Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$ équivaut au fait que $\overrightarrow{IM}$ soit orthogonal à (AB), et on a bien le résultat annoncé. ■

Corollaire 0.2.4.
Une isométrie du plan est une reflexion si, et seulement si son ensemble de points fixes est une droite.

Démonstration. Soit f une isométrie de $\mathcal{P}$ dont l'ensemble des points fixes est une droite $\mathcal{D}$ et $M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$. Par isométrie, pour tout point $N \in \mathcal{D}$ on a $NM = NM'$ et N appartient à la médiatrice de $[MM']$ qui est donc $\mathcal{D}$: M' est le symétrique de M par rapport à $\mathcal{D}$ et f est une réflexion. ■

Théorème 0.2.5.
Soit I un point de $\mathcal{P}$ et θ un réel. L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

tel que $IM = IM'$ et lorsque $M \neq I$, $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta[2\pi]$, est une rotation du plan.
On dira que c'est une rotation de centre I et d'angle θ et on notera $R_{I,\theta}$.

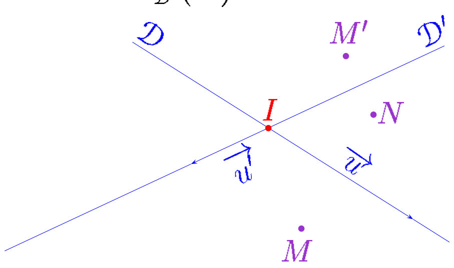
Démonstration. On a directement que le point I est fixe par f. Montrons que f est un déplacement: Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$, alors

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}\right) + \left(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}\right) + \left(\overrightarrow{IB'}, \overrightarrow{IB}\right) [2\pi] \\ &\equiv \theta + \left(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}\right) - \theta\, [2\pi] \\ \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}\right) [2\pi]. \end{aligned}$$

■

Théorème 0.2.6.
Le produit $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ des deux réflexions planes d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en I est une rotation $R_{I,\theta}$ d'angle $\theta \equiv 2(\mathcal{D}, \mathcal{D}')[2\pi]$.
Réciproquement, toute rotation affine $R_{I,\theta}$ se décompose d'une infinité de façons en produit $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécants en I et tels que $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$.

Démonstration. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en I de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. Soit M un point du plan, $N := s_{\mathcal{D}}(M)$ et $M' := s_{\mathcal{D}'}(N)$.



Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des bissectrices respectives des couples $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'}\right)$, ainsi:

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IN}\right)[2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'}\right)[2\pi].$$

En ajoutant, on obtient

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) \equiv 2(\mathcal{D}, \mathcal{D}')[2\pi].$$

Comme $IM = IN = IM'$, il en résulte que l'on passe de M à M' par la rotation de centre I et d'angle $2(\mathcal{D}, \mathcal{D}')[2\pi]$.

La réciproque, résulte du fait que la décomposition proposée dans l'énoncé du théorème donne $R_{I,\theta}$ en vertu de ce qui précède. ■

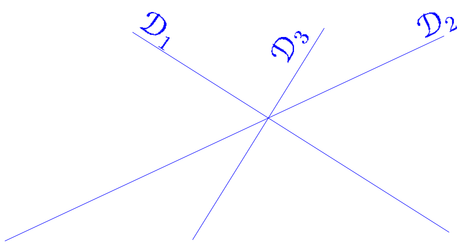
Corollaire 0.2.7.
Une isométrie est une rotation distincte de l'identité si, et seulement si elle a un unique point fixe.

Démonstration. Si f est une isométrie du plan $\mathcal{P}$ qui a un seul point fixe I, soit $A \in \mathcal{P}$ $(A \neq I)$ d'image A', $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AA']$ (elle passe par I car $IA = IA'$ par isométrie) et $g := s_{\mathcal{D}} \circ f$. Alors g est une isométrie qui fixe A et I; c'est donc une réflexion $s_{\mathcal{D}'}$ (ce n'est pas l'identité, sinon f serait une réflexion, ce qui est absurde) et $f = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$; ceci implique que f est soit une translation ou une rotation, or f possède un point fixe, c'est donc une rotation. ■

0.3 Applications.

0.3.1 Construction.

Exercice: Etudier la composition S des trois réflexions d'axes les médiatrices d'un triangle. En déduire une construction d'un triangle dont on connait les trois médiatrices.



Démonstration. On a, $S = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. Ainsi,

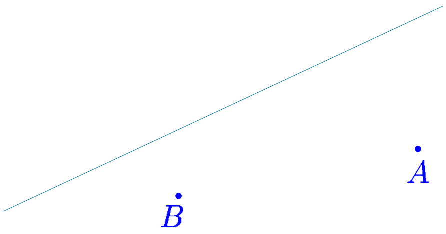
$$S(B) = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(B) = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}(C) = s_{\mathcal{D}_3}(A) = B,$$

donc B est un point fixe de S. Le point I intersection des trois bissectrices est également un point fixe de S (car il est fixe pour les trois réflexions proposées). Donc S est une réflexion d'axe (BI).

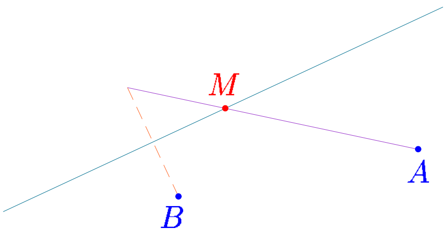
Si on a $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, alors on a I et il nous reste à déterminer l'axe de la réflexion S. On prend donc un point M quelconque de $\mathcal{P}$ et on lui applique S afin de construire M'. L'axe recherché est alors la médiatrice de $[MM']$. Il suffit alors de prendre un point sur cette droite pour trouver le triangle souhaité. ■

0.3.2 Optimisation.

- **Exercice 1:** Etant donnée une droite $\mathcal{D}$ et deux points A et B dans le même demi-plan délimité par $\mathcal{D}$, trouver le point M de $\mathcal{D}$ pour lequel la somme des longueurs $AM+MB$ est minimale.

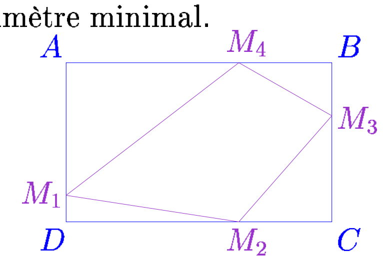


Démonstration. Si B' est l'image de B par la réflexion d'axe $\mathcal{D}$, par isométrie pour tout point P de $\mathcal{D}$, on a $PB = PB'$ et par suite, $AP + PB = AP + PB'$; cette dernière somme est égale à la ligne polygonale APB' qui est minimale lorsqu'elle est droite. Le point M cherché est donc l'intersection de (AB') avec $\mathcal{D}$.

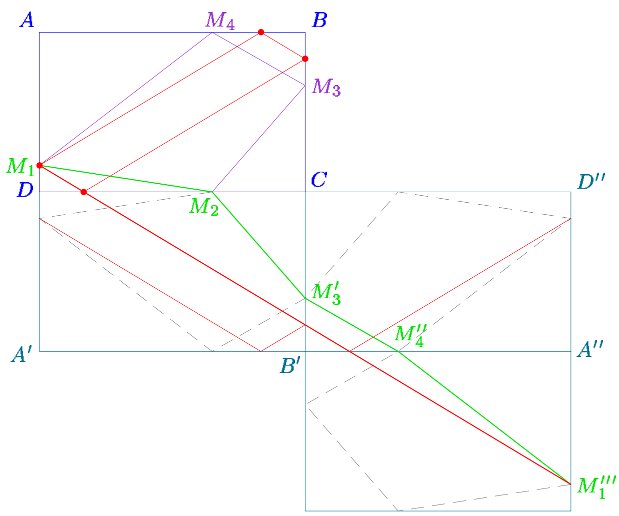


■

- **Exercice 2:** Parmi les quadrilatères convexes $PQRS$ inscrit dans un rectangle $ABCD$, chercher ceux qui ont un périmètre minimal.



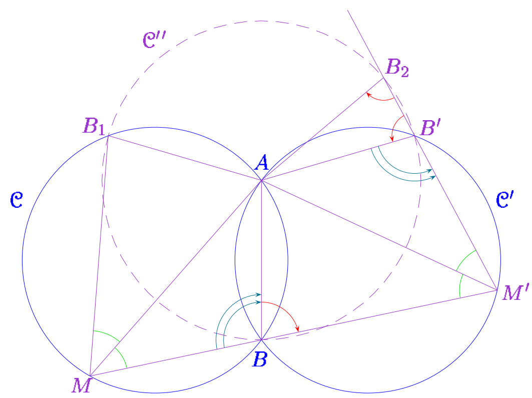
Démonstration. Soit M un point de $[AD$, on effectue les réflexions comme l'indique le dessin suivant:



Avec les notations du dessin, par isométrie, $M_1M_2M_3M_4$ à un périmètre égal à la longueur de la ligne polygonale $M_1M_2M_3'M_4''M_1'''$ qui est de longueur minimale lorsqu'elle est droite. Or, toujours par le jeu des réflexions, $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{A''M_1'''}$ donc (M_1M_1''') est parallèle à (AA''). Comme $[CA'']$ est l'image de $[CA]$ par la composée de $s_{(DC)} \circ s_{(CB')}$ qui n'est autre qu'une rotation d'angle $0[2\pi]$, par conséquent A, C, A'' sont alignés. On en déduit que le quadrilatère construit précédemment à ces côtés parallèles aux diagonales de $ABCD$. ■

0.3.3 Configurations classiques.

◇ **Exercice 1:** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan euclidien, de même rayons, sécants en A et B. Si M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B, on note M' son image par l'unique rotation de centre A qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Montrer que M, B et M' sont alignés.



Démonstration. Soit R la rotation de centre A qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ et M un point de $\mathcal{C}$. Notons $B' := R(B)$, $B_1 := s_{(AB)}(B')$, $\mathcal{C}''$ le cercle de centre A et de rayon AB et $B_2 := \mathcal{C}'' \cap (B'M')$. Comme $B' = R(B)$, $B' \in \mathcal{C}''$. L'angle de R vaut $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)$ $[2\pi]$, or une réflexion inverse les angles orientés, donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}\right)$ $[2\pi]$ et par conséquent $R(B_1) = B$.

Le triangle MAM' est isocèle de sommet A donc l'angle géométrique $\widehat{AMM'} = \widehat{AM'M}$. La rotation R envoie le triangle AB_1M sur le triangle ABM donc $\widehat{B_1MA} = \widehat{BM'A}$. De même, R envoie le triangle AMB sur le triangle $AM'B'$, ainsi $\widehat{AMB} = \widehat{AM'B'}$. Or $\widehat{AMB} = \widehat{AMM'} = \widehat{AM'M}$ donc $\widehat{AM'B'} = \widehat{AM'M}$, ce qui entraine que $s_{(AM')}((MM')) = (M'B')$ et laisse invariant $\mathcal{C}''$ (car il est de centre A), donc $s_{(AM')}(B) = B_2$ et par inversion des angles orientés, on obtient $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B_2M'}, \overrightarrow{B_2A}\right)$ $[2\pi]$.

Comme R envoie le triangle AMB sur le triangle $AM'B'$, on a $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B'M'}, \overrightarrow{B'A}\right)$ $[2\pi]$. Or $B'AB_2$ est isocèle de sommet A donc $\left(\overrightarrow{B'B_2}, \overrightarrow{B'A}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B_2A}, \overrightarrow{B_2B'}\right)$ $[2\pi]$. Or $B_2 \in (B'M')$ donc si $B_2 \in [B'M']$, $\left(\overrightarrow{B_2M'}, \overrightarrow{B_2A}\right) + \left(\overrightarrow{B_2A}, \overrightarrow{B_2B'}\right) \equiv 0[2\pi]$, sinon $\left(\overrightarrow{B'M'}, \overrightarrow{B'A}\right) + \left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B_2}\right) \equiv 0[2\pi]$ et dans les deux cas, on a: $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv 0[2\pi]$ ce qui implique que M, B, M' sont alignés. ■

◇ **Exercice 2:** Configuration de Von Aubel. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P, Q, R, S les centres de quatres carrés extérieurs à $ABCD$, construits sur les côtés de ce dernier. Montrer que $[PR]$ et $[QS]$ sont orthogonaux et de même longueur.

Démonstration. ■