Reflexions et rotations de l'espace. Invariants élémentaires: effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

Pré-requis:

◇ La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
◇ La définition et principales propriétés d'une application affine.
◇ La définition de projection orthogonale (En particulier, c'est une application affine).
◇ La définition d'angle orienté (En particulier, les angles de plans).
◇ La définition d'une rotation plane (Avec sa décomposition en produit de reflexions).
◇ La caractérisation d'une isométrie par son application vectorielle associée (qui est une application orthogonale).
◇ Définitions des droites remarquables du triangle et celle de plan médiateur

Cadre: On se place dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

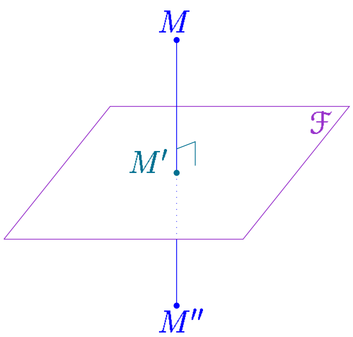
0.1 Réflexion dans l'espace.

Définition 0.1.1.
Soit $\mathcal{F}$ une variété affine de $\mathcal{E}$.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ l'application

$$s_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M'' \end{array}$$

où

$$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'} \quad \text{avec } M' \text{ le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathcal{F}.$$



Remarques:

◇ La symétrie orthogonale $s_{\mathcal{F}}$ est involutive (donc bijective d'inverse elle-même).

Démonstration. Posons $s_{\mathcal{F}}(M) = M_1$ et $s_{\mathcal{F}}(M_1) = M_2$, alors $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1M'}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \\
&= 2\left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M_1M'}\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM'}\right) \\
&= 2\left(2\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M_1M}\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M}\right) \\
\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

■

◇ Lorsque $\mathcal{F}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$ on dit que $s_{\mathcal{F}}$ est une réflexion d'axe $\mathcal{F}$.

Proposition 0.1.2.
La symétrie orthogonale est une application affine.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}(M)s_{\mathcal{F}}(N)} &= \overrightarrow{M''N''} \\
&= \overrightarrow{M''M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN''} \\
&= 2\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NN'} \\
&= 2\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{MN'} \\
&= 2\overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{MN}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}} = 2\overrightarrow{p_{\mathcal{F}}} - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ où $p_{\mathcal{F}}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$. ■

Conséquence: Une symétrie orthogonale conserve l'alignement, le parallélisme, les barycentres, les rapports de distances; mais on a encore mieux:

Proposition 0.1.3.
La symétrie orthogonale est une isométrie de $\mathcal{E}$.

Démonstration. En appelant $p_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$, on a:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \cdot \overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{PQ}\right) &= \left(2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} - \overrightarrow{MN}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} - \overrightarrow{PQ}\right) \\
&= 4\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} - 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&\quad -2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} + 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \\
&\quad -2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \\
&\quad -2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} \cdot \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \cdot \overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{PQ}\right) &= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}
\end{aligned}$$

■

Conséquence: Les réfléxions conservent les angles non orientés.

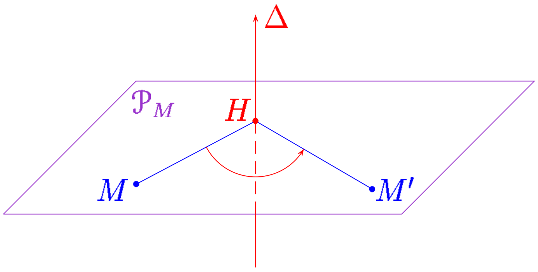
0.2 Rotation de l'espace.

Dans cette partie, $\mathcal{E}$ sera de dimension 3.

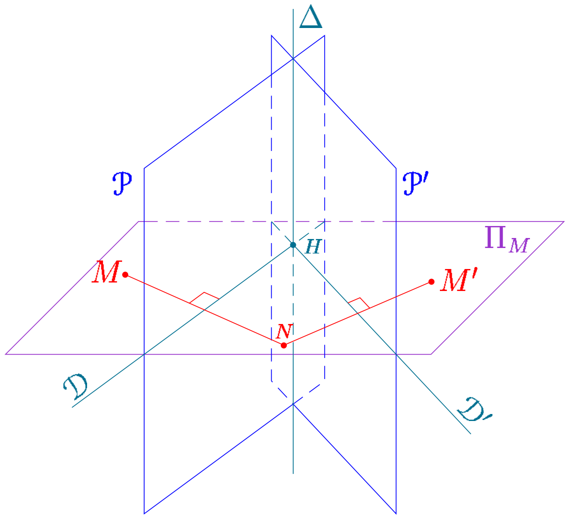
Définition 0.2.1.
Soient θ un réel et Δ un axe (c'est-à-dire une droite orientée par le choix de l'un de ses vecteurs directeurs).
La rotation $R_{\Delta,\theta}$ d'axe Δ et d'angle θ est l'application:

$$R_{\Delta,\theta}: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

où M' est défini de la manière suivante: soit $\mathcal{P}_M$ le plan passant par M et orthogonal à Δ, orienté par sa normale Δ. Dans le plan $\mathcal{P}_M$, M' est le transformé de M par la rotation plane de centre H, où $\Delta \cap \mathcal{P}_M = \{H\}$, et d'angle θ.



Théorème 0.2.2.
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants en la droite Δ.
Le produit $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$ est une rotation $R_{\Delta,\theta}$ avec $\theta = 2(\mathcal{P}, \mathcal{P}')[2\pi]$.
Réciproquement, Toute rotation $R_{\Delta,\theta}$ se décompose d'une infinité de façons en le produit $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$ de deux réflexions de plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécant en Δ et tels que $(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \frac{\theta}{2}[\pi]$; l'un des plans peut être choisi arbitrairement passant par Δ.



Démonstration. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants en Δ, $M \in \mathcal{E}$, $N = s_{\mathcal{P}}(M)$, $M' = s_{\mathcal{P}'}(N)$. Le plan Π_M passant par M et orthogonal à Δ coupe respectivement $\mathcal{P}$ en $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}'$ en $\mathcal{D}$, Δ en H et l'on a $N = s_{\mathcal{D}}(M)$, $M' = s_{\mathcal{D}'}(N)$; si $\frac{\theta}{2}$ est la mesure de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ dans le plan orienté Π_M, on sait que la composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est la rotation plane de centre H et d'angle θ et, vu la définition d'une rotation de l'espace, on passe de M à M' par la rotation $R_{\Delta,\theta}$.

Inversement, si $R_{\Delta,\theta}$ est une rotation de l'espace, pour tout couple de plans $(\mathcal{P},\mathcal{P}')$ qui sont sécants en Δ et qui font un angle de mesure $\frac{\theta}{2}$, on a $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}} = R_{\Delta,\theta}$ en vertu de ce qui précède, ce qui démontre la réciproque. ∎

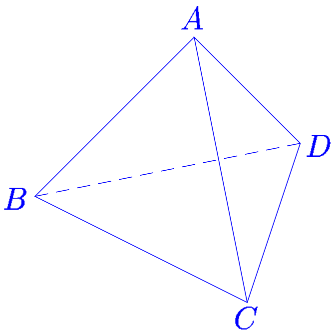
Conséquence: Cette décomposition permet de voir qu'une rotation de l'espace est une application affine, isométrique et directe (Il n'est pas obligatoire de savoir qu'une reflexion inverse le angles orientés pour l'affirmer).

Exercice: Montrer que le produit $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$ de deux réflexions de l'espace est commutatif si, et seulement si les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux ou confondus.

0.3 Action sur les configurations usuelles.

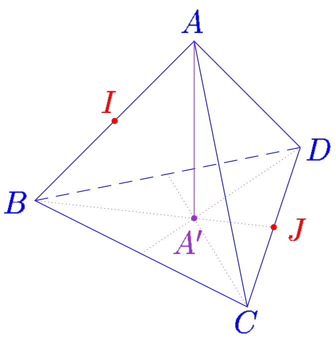
Les réflexions et les rotations étant toutes les deux des applications affines isométriques, l'image d'un cercle est une cercle de même rayon, l'image d'une sphère est une sphère de même rayon, l'image d'un triangle est un triangle isométrique, l'image d'un cube est un cube de même longueur d'arête.

Les réflexions et rotations conservant le tétraèdre régulier: Quatres points A, B, C, D forment les sommets d'un tétraèdre régulier si, et seulement si $AB = BC = CD = DA$. On va chercher toutes les réflexions et rotations conservant $ABCD$:



Examinons tout d'abord quelques propriétés du tétraèdre:

Propriétés 0.3.1.
Les quatres hauteurs d'un tétraèdre régulier sont concourantes en le centre (isobarycentre) et coupent la face correspondante en le centre du triangle; les bimédianes sont concourantes en le centre, orthogonales aux arêtes qu'elles joignent.

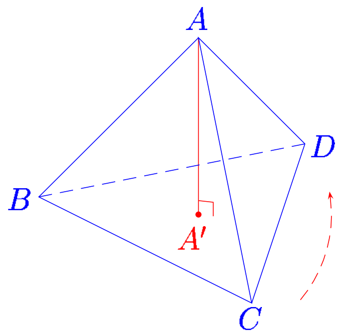


Démonstration. Soit A' le centre de BCD, point de concours des médianes de BCD qui sont aussi ses hauteurs, médiatrices, bissectrices, car il est équilatéral. Le plan médiateur de $[CD]$ coupe le plan (BCD) en (BJ) qui est donc la hauteur de BCD; il coupe le plan médiateur de

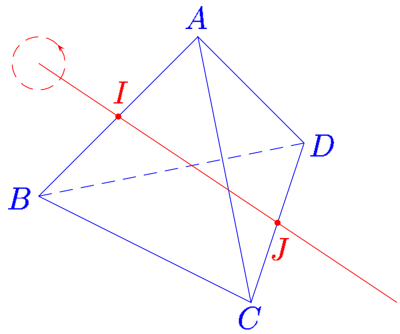
$[BC]$ en une droite formée des points équidistants de B, C, D et qui contient donc le point A; cette droite est donc (AA') et est orthogonale à (BCD): c'est la hauteur issue de A; le centre O étant sur (AA'), les quatres hauteurs se coupent en O. Si I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, les plans médiateurs de ces deux arêtes se coupent suivant (IJ) qui est la perpendiculaire commune aus deux arêtes. ■

Cherchons maintenant les rotations conservant le tétraèdre:

- L'identité de $\mathcal{E}$.
- Les rotations $R_{(AA'),\frac{2\pi}{3}}$ et $R_{(AA'),\frac{4\pi}{3}}$ (car la hauteur (AA') coupe le triangle équilatéral BCD en son centre de gravité). Comme il y a trois autres hauteurs, on trouve de même, six autres rotations du même type (huit en tout).



- La rotation d'axe (IJ) et d'angle π. Il y a trois bimédianes dans le tétrèdre, on trouve alors trois rotations de ce type.



On a donc trouvé douze rotations conservant le tétraèdre.

Puisque (ICD) est le plan médiateur du segment $[AB]$, $s_{(ICD)}$ conserve $ABCD$. Avec cette réflexion, on obtient douze autres isométries conservant $ABCD$: $s_{(ICD)}$, $s_{(ICD)} \circ r_i$ $i \in [\![1, 11]\!]$ où r_i sont les rotations trouvées précédemment (Se sont bien des isométries distinctes des précédentes, car se sont des antidéplacements, on dit que se sont des antirotations). On a alors trouvé 24 isométries conservant $ABCD$.

En fait, il n'y en a pas d'autres: Une isométrie étant une application affine, elle conserve les barycentres, or A, B, C et D sont les seuls points du tétraèdres qui ne sont pas barycentre de deux points du tétraèdre, par conséquent une isométrie conservant le tétraèdre envoie un sommet sur un sommet. De plus, une isométrie est entièrement déterminée par la donnée de quatre points non coplanaires, ainsi l'ensemble des isométries conservant le tétraèdre régulier possède autant d'élément que le nombre de façon de permuter A, B, C, D; c'est-à-dire $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. On a donc bien décrit toutes ces isométries.