Réflexions et rotations du plan. Invariants élémentaires: effet sur les distances, l'alignement, les angles. Application à l'action sur les configurations usuelles.

Pré-requis:
- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine du plan (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- ◇ Définition d'une droite.
- ◇ Définition de la projection orthogonale sur une droite $\mathcal{D}$.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ de plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Notation: Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'application, on notera toujours X' l'image d'un point X par cette application.

0.1 Réflexion et rotation du plan.

Définition 0.1.1.
On appelle isométrie affine du plan $\mathcal{P}$, que l'on notera $\text{Is}(\mathcal{P})$, toute application affine du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui conserve la distance.

Remarque: Nous aurions pu définir une isométrie comme une application qui conserve les distances, puis vérifier qu'elle est toujours affine. Malheureusement, bien que les démonstrations soient élémentaires, elles sont trop longues.

Théorème 0.1.2.
Toute isométrie affine de $\mathcal{P}$ est bijective.

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'une isométrie f est injective: Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$ vérifiant $M' = N'$ alors $0 = M'N' = MN$ car f est une isométrie et par conséquant $M = N$. Puisque l'on est en dimension finie, cela signifie que f est aussi surjective, d'où le résultat. ■

Définition 0.1.3.
Soit $f \in \text{Is}(\mathcal{P})$ et F l'ensemble des points fixes de f
- Si $F = \emptyset$, on dit alors que f est une translation.
- Si F est un point, on dit alors que f est une rotation.
- Si F est une droite, on dit alors que f est une réflexion.

Remarque: Dans tous les autres cas f vaut l'identité.

0.2 Invariants élémentaires.

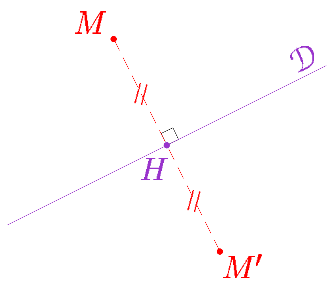
Puisque une isométrie est une application affine, elle conserve le parallélisme, l'orthogonalité et les barycentres.

Voyons plus en détail les invariants élémentaires des réflexions et des rotations.

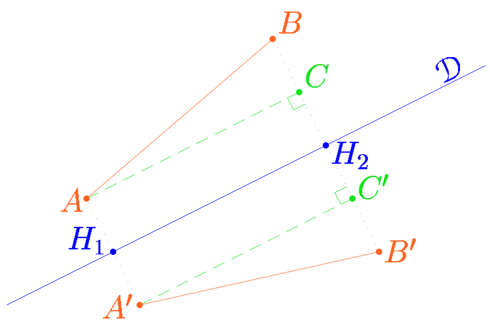
Théorème 0.2.1.
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & M & \longmapsto & M' \end{array}$$

tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, est une reflexion du plan. On dira alors que c'est une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et on la notera $s_{\mathcal{D}}$.



Démonstration. Montrons que cette application conserve les distances:



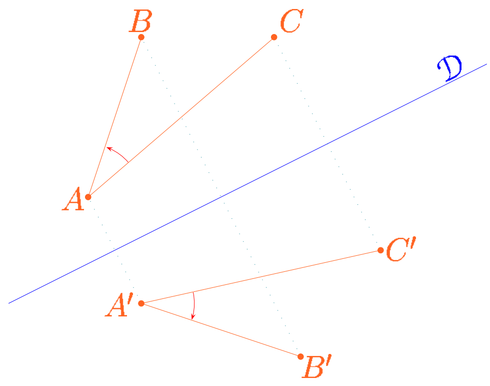
AH_1H_2C et $A'C'H_2H_2$ sont deux rectangles identiques car $H_1A = H_1A'$ et par conséquent $AC = A'C'$, $CB = C'B'$ et ACB, $A'C'B'$ sont respectivement les triangles rectangles en C et C', par conséquent ils sont semblables et on a bien $AB = AC$.

Il découle directement de la structure d'espace affine de $\mathcal{P}$ que l'application vectorielle associée $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$ est linéaire et que par conséquent f est affine.

De plus, il est clair que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points fixes de f. ∎

Propriété 0.2.2.
Une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ inverse les angles orientés.

Démonstration. Soit f la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et A, B, C trois points du plan.



Par la relation de Chasles, on a:

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) &= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right) + \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) + \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}\right) \\
&\quad + \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{AB}\right) [2\pi] \\
&= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right) + \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) + \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A}\right) \\
&\quad + \left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AB}\right) [2\pi] \\
&= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right) + \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) + \left(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{AA'}\right) \\
&\quad + \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BA}\right) [2\pi] \\
&= -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) - \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) [2\pi] \\
\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) &= -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) - 2\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) [2\pi]
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) [2\pi].$$

■

✎ Théorème 0.2.3.

Soit I un point de $\mathcal{P}$ et θ un réel. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & M & \longmapsto & M' \end{array}$$

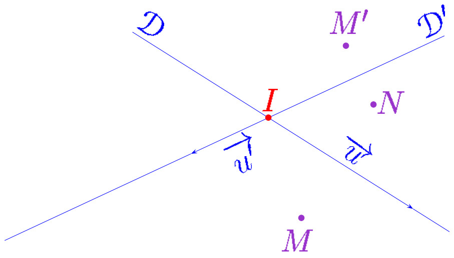
tel que $IM = IM'$ et lorsque $M \neq I$, $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta[2\pi]$, est une rotation du plan.
On dira que c'est une rotation de centre I et d'angle θ et on notera $R_{I,\theta}$.

Démonstration. On a directement que le point I est le point fixe de f. Démontrons ce petit lemme afin de voir que cette application est affine:

✎ Lemme 0.2.4.

Le produit $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ des deux réflexions planes d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en I est une rotation $R_{I,\theta}$ d'angle $\theta \equiv 2(\mathcal{D}, \mathcal{D}')[2\pi]$.
Réciproquement, toute rotation affine $R_{I,\theta}$ se décompose d'une infinité de façons en produit $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécants en I et tels que $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$.

Démonstration. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en I de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. Soit M un point du plan, $N := s_{\mathcal{D}}(M)$ et $M' := s_{\mathcal{D}'}(N)$.



Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des bissectrices respectives des couples $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'}\right)$, ainsi:

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IN}\right)[2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'}\right)[2\pi].$$

En ajoutant, on obtient

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) \equiv 2(\mathcal{D}, \mathcal{D}')[2\pi].$$

Comme $IM = IN = IM'$, il en résulte que l'on passe de M à M' par la rotation de centre I et d'angle $2(\mathcal{D}, \mathcal{D}')[2\pi]$.

La réciproque, résulte du fait que la décomposition proposée dans l'énoncé du théorème donne $R_{I,\theta}$ en vertu de ce qui précède. ∎

On a donc f qui s'écrit toujours comme composée de deux réflexions, par conséquent f est bien une isométrie. Comme les réflexions, la structure d'espace affine de $\mathcal{P}$ nous permet de dire que f est affine. ∎

Propriété 0.2.5.
Une rotation de centre I conserve les angles orientés.

Démonstration. Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$, alors

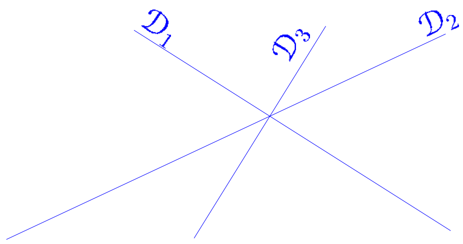
$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}\right) + \left(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}\right) + \left(\overrightarrow{IB'}, \overrightarrow{IB}\right)[2\pi] \\
&\equiv \theta + \left(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}\right) - \theta\,[2\pi] \\
\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}\right)[2\pi].
\end{aligned}$$

∎

0.3 Applications.

0.3.1 Construction.

Exercice: Etudier la composition S des trois réflexions d'axes les médiatrices d'un triangle. En déduire une construction d'un triangle dont on connait les trois médiatrices.



Démonstration. Supposons que l'on a déjà construit un triangle ABC dont les médiatrices sont $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$. On a, $S = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. Ainsi,

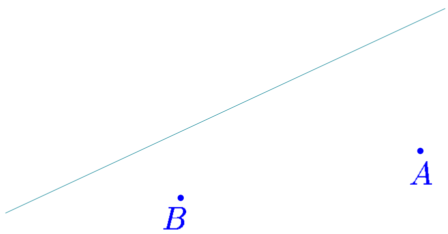
$$S(B) = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(B) = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}(C) = s_{\mathcal{D}_3}(A) = B,$$

donc B est un point fixe de S. Le point I intersection des trois bissectrices est également un point fixe de S (car il est fixe pour les trois réflexions proposées). Donc S est une réflexion d'axe (BI).

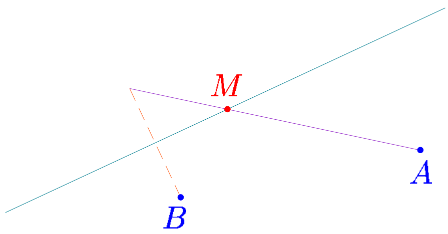
Si on a $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, alors on a I et il nous reste à déterminer l'axe de la réflexion S. On prend donc un point M quelconque de $\mathcal{P}$ et on lui applique S afin de construire M'. L'axe recherché est alors la médiatrice de $[MM']$. Il suffit alors de prendre un point sur cette droite pour trouver le triangle souhaité. ∎

0.3.2 Optimisation.

◇ **Exercice 1:** Etant donnée une droite $\mathcal{D}$ et deux points A et B dans le même demi-plan délimité par $\mathcal{D}$, trouver le point M de $\mathcal{D}$ pour lequel la somme des longueurs $AM + MB$ est minimale.

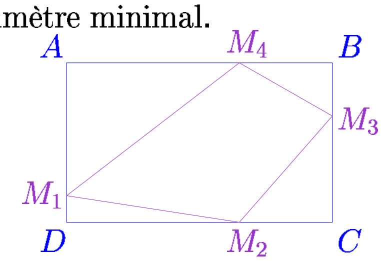


Démonstration. Si B' est l'image de B par la réflexion d'axe $\mathcal{D}$, par isométrie pour tout point P de $\mathcal{D}$, on a $PB = PB'$ et par suite, $AP + PB = AP + PB'$; cette dernière somme est égale à la ligne polygonale APB' qui est minimale lorsqu'elle est droite. Le point M cherché est donc l'intersection de (AB') avec $\mathcal{D}$.

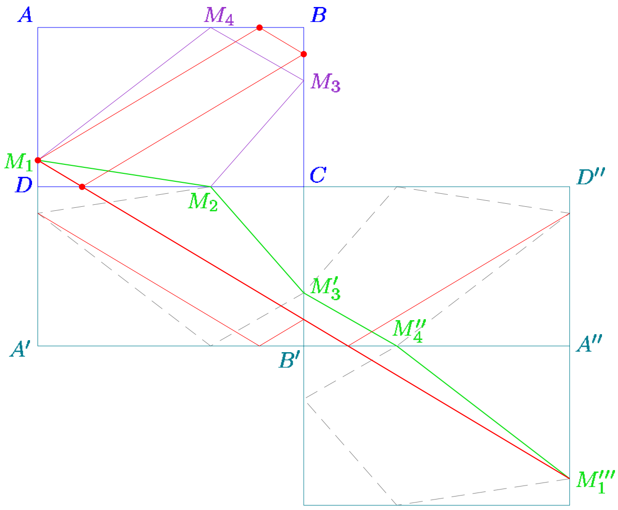


∎

◇ **Exercice 2:** Parmi les quadrilatères convexes $PQRS$ inscrit dans un rectangle $ABCD$, chercher ceux qui ont un périmètre minimal.



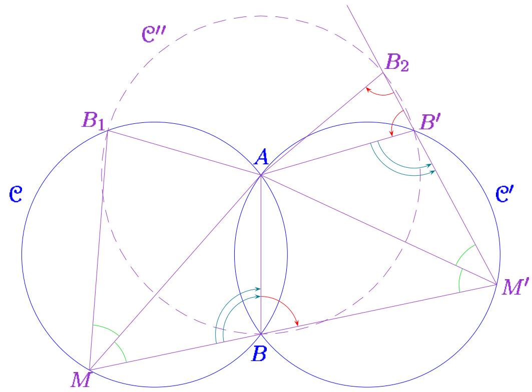
Démonstration. Soit M un point de $[AD$, on effectue les réflexions comme l'indique le dessin suivant:



Avec les notations du dessin, par isométrie, $M_1M_2M_3M_4$ à un périmètre égal à la longueur de la ligne polygonale $M_1M_2M_3'M_4''M_1'''$ qui est de longueur minimale lorsqu'elle est droite. Or, toujours par le jeu des réflexions, $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{A''M_1'''}$ donc (M_1M_1''') est parallèle à (AA''). Comme $[CA'']$ est l'image de $[CA]$ par la composée de $s_{(DC)} \circ s_{(CB')}$ qui n'est autre qu'une rotation d'angle $0[2\pi]$, par conséquent A, C, A'' sont alignés. On en déduit que le quadrilatère construit précédemment à ces côtés parallèles aux diagonales de $ABCD$. ■

0.3.3 Configurations classiques.

◇ **Exercice 1:** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan euclidien, de même rayons, sécants en A et B. Si M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B, on note M' son image par l'unique rotation de centre A qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Montrer que M, B et M' sont alignés.



Démonstration. Soit R la rotation de centre A qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ et M un point de $\mathcal{C}$. Notons $B' := R(B)$, $B_1 := s_{(AB)}(B')$, $\mathcal{C}''$ le cercle de centre A et de rayon AB et $B_2 := \mathcal{C}'' \cap (B'M')$. Comme $B' = R(B)$, $B' \in \mathcal{C}''$. L'angle de R vaut $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) [2\pi]$, or une réflexion inverse les angles orientés, donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}\right) [2\pi]$ et par conséquent $R(B_1) = B$.
Le triangle MAM' est isocèle de sommet A donc l'angle géométrique $\widehat{AMM'} = \widehat{AM'M}$. La rotation R envoie le triangle AB_1M sur le triangle ABM donc $\widehat{B_1MA} = \widehat{BM'A}$. De même, R envoie le triangle AMB sur le triangle $AM'B'$, ainsi $\widehat{AMB} = \widehat{AM'B'}$. Or $\widehat{AMB} = \widehat{AMM'} = \widehat{AM'M}$ donc $\widehat{AM'B'} = \widehat{AM'M}$, ce qui entraine que $s_{(AM')}((MM')) = (M'B')$ et laisse invariant $\mathcal{C}''$ (car il est de centre A), donc $s_{(AM')}(B) = B_2$ et par inversion des angles orientés, on obtient $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B_2M'}, \overrightarrow{B_2A}\right) [2\pi]$.
Comme R envoie le triangle AMB sur le triangle $AM'B'$, on a $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B'M'}, \overrightarrow{B'A}\right) [2\pi]$. Or $B'AB_2$ est isocèle de sommet A donc $\left(\overrightarrow{B'B_2}, \overrightarrow{B'A}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B_2A}, \overrightarrow{B_2B'}\right) [2\pi]$. Or $B_2 \in (B'M')$ donc si $B_2 \in [B'M']$, $\left(\overrightarrow{B_2M'}, \overrightarrow{B_2A}\right) + \left(\overrightarrow{B_2A}, \overrightarrow{B_2B'}\right) \equiv 0[2\pi]$, sinon $\left(\overrightarrow{B'M'}, \overrightarrow{B'A}\right) + \left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B_2}\right) \equiv 0[2\pi]$ et dans les deux cas, on a: $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv 0[2\pi]$ ce qui implique que M, B, M' sont alignés. ■

◇ **Exercice 2:** Configuration de Von Aubel. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P, Q, R, S les centres de quatres carrés extérieurs à $ABCD$, construits sur les côtés de ce dernier. Montrer que $[PR]$ et $[QS]$ sont orthogonaux et de même longueur.