Réflexion du plan échangeant deux points donnés; médiatrice, régionnement associé. Application au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).

Pré-requis:
- ◇ La projection orthogonale.
- ◇ Définition d'une droite.
- ◇ La condition d'orthogonalité de deux vecteurs.
- ◇ Notion d'angle orienté de vecteurs; noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et la relation de Chasles.
- ◇ Définition de demi-plan, demi-droite et segment.
- ◇ Propriétés angulaires d'un triangle.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.

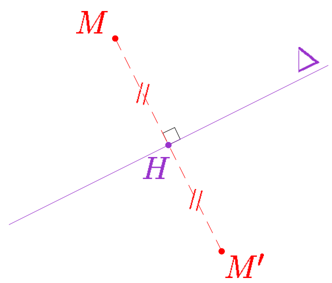
Notation: Pour A et B deux points de $\mathcal{P}$, on notera AB la distance de A à B.

0.1 Reflexion et médiatrice.

Définition 0.1.1.
Soient Δ une droite et M un point de $\mathcal{P}$.
On appelle reflexion d'axe Δ (ou selon Δ) l'application

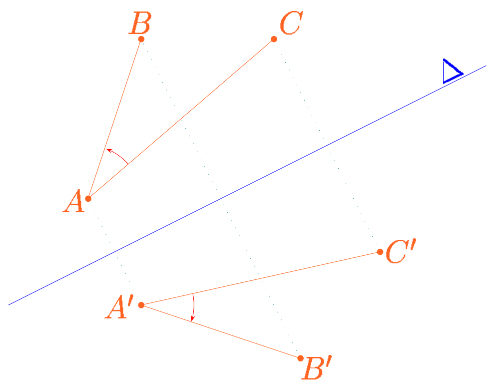
$$r_\Delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

telle que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ avec H le projeté orthogonal de M sur Δ.



Remarques:
- La reflexion d'axe Δ est involutive: en effet, si $r_\Delta(M) = M'$ et $r_\Delta(M') = M''$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'H} = 2\overrightarrow{M'M} + 2\overrightarrow{MH} = -4\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{M'M}$ d'où $M'' = M$.

- Une reflexion transforme un angle de vecteur en son opposé; En effet,



Par la relation de Chasles, on a:

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) &= \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)+\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{B'B}\right)\\
&\quad +\left(\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\\
&= \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)+\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'A}\right)\\
&\quad +\left(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\\
&= \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)+\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{AA'}\right)\\
&\quad +\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]\\
&= -\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)-\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]\\
\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) &= -\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)-2\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$$

Théorème 0.1.2.

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, alors il existe une unique droite Δ telle que la reflexion par rapport à Δ échange A et B.
Cette droite est appelée la médiatrice du segment $[AB]$.

Démonstration. Soit Δ une telle droite, elle est perpendiculaire à la droite (AB) et, par définition d'une réflexion, elle contient le milieu I du segment $[AB]$; c'est donc la perpendiculaire à (AB) passant par I.

Réciproquement, la perpendiculaire à (AB) passant par I est bien un axe de réflexion échangeant A et B. ■

0.2 Régionnement associé à la médiatrice.

Théorème 0.2.1.

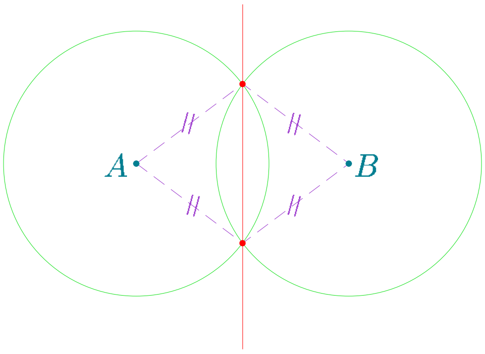
La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points equidistants de A et de B.

Démonstration. Soit M un point vérifiant $MA = MB$, c'est équivalent à dire que $MA^2 - MB^2 = 0$ soit encore,

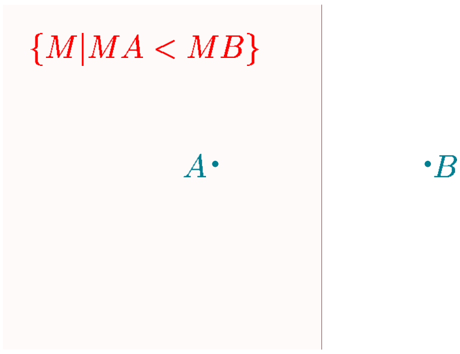
$$0 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI}$$

où I est le milieu de $[AB]$. Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$ équivaut au fait que $\overrightarrow{IM}$ soit orthogonal à (AB), et on a bien le résultat annoncé. ■

Remarque: On en déduit une construction de la médiatrice de $[AB]$; on trace deux cercles centré en A et B et de même rayon (suffisemment grand pour qu'ils se coupent en deux points). Les deux points d'intersection ainsi obtenu sont equidistants de A et de B et appartiennent donc à la médiatrice recherchée.



Proposition 0.2.2.
Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$. L'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $MA < MB$ est le demi-plan ouvert délimité par la médiatrice Δ de $[AB]$ et contenant A.



Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ et I le milieu de $[AB]$, on a:

$$\begin{aligned}
MA^2 - MB^2 &= \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \\
&= \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} \\
&= 2\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}\right) \\
&= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} \quad \text{(car } (AB) \text{ et } (HM) \text{ sont orthogonales)} \\
MA^2 - MB^2 &= 2\overline{AB} \cdot \overline{IH}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $MA < MB$ si, et seulement si $\overline{IH}$ est de signe opposé à $\overline{AB}$, c'est-à-dire si H est sur la demi-droite ouverte (AB) délimitée par I et contenant A, ou encore si M appartient au demi-plan ouvert délimité par la médiatrice Δ de $[AB]$ et contenant A. ■

0.3 Applications.

0.3.1 Application au triangle.

Théorème 0.3.1.

Soit ABC un triangle non plat, ses trois médiatrices sont concourantes en un point.

Démonstration. Si ABC est non plat, les médiatrices $\Delta_{[AB]}$ et $\Delta_{[BC]}$ des côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont sécantes en un point O. Le point O est équidistant de A et B car il appartient à $\Delta_{[AB]}$ et équidistant de B et C car il appartient à $\Delta_{[BC]}$, par conséquent O est équidistant de A et C ce qui signifie qu'il est élément de la médiatrice de $[AC]$; les médiatrices sont donc concourantes en O. ■

Remarques: Le point O trouvé est le centre du cercle circonscrit à ABC; il n'existe pas d'autre cercle passant par A, B et C car il n'existe qu'un seul point O.

Avec la remarque précédente, on peut maintenant construire le cercle passant par trois points A, B et C donnés non alignés, en traçant les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ et leur intersection donne le centre du cercle.

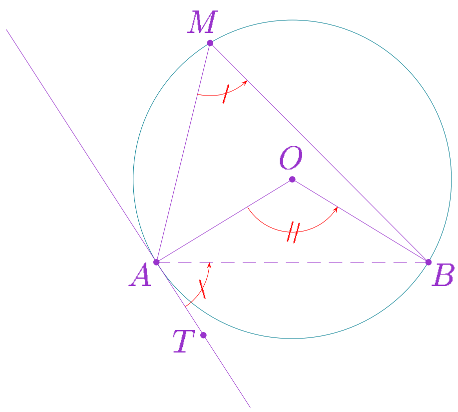
0.3.2 Application au cercle.

Théorème 0.3.2.

Théorème de l'angle au centre

Soient M, A, B trois points distincts d'un cercle de centre O et T un point de la tangente en A ($T \neq A$), l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est égal au double de l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ et au double de l'angle de la tangente $\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right)$, c'est-à-dire:

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) [2\pi].$$



Démonstration. Considérons les bissectrices Δ_{MA} de $[MA]$ et Δ_{MB} de $[MB]$ et $r_{(MA)}$ et $r_{(MB)}$ les réflexions d'axe respectif Δ_{MA} et Δ_{MB}.

Puisqu'une réflexion transforme un angle de vecteur en son opposé, nous avons en appliquant $r_{(MA)}$, $r_{(MB)}$:

$$\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}\right) = -\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right) \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right) = -\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right).$$

Ainsi, en écrivant la relation de Chasles:

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) &= \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right) + \left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right) + \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right) + \left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right) + 2\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right) \\
\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) &= 2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)
\end{aligned}$$

On a

$$2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) = 2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}\right) + 2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right) = \pi + 2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\ [2\pi].$$

La somme des angles orientés du triangle isocèle AOB étant égal à π, on a:

$$2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\ [2\pi]$$

d'où:

$$2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) = \pi + 2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right) = \pi + \pi - \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\ [2\pi].$$

■

Remarque: La position de T sur la tangente n'a pas d'importance dans ce théorème.

Corollaire 0.3.3.
Condition angulaire de cocyclicité
Soient A, B, C, D quatre points distincts non alignés de $\mathcal{P}$. Les points A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si

$$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\ [\pi].$$

Démonstration. Si A, B, C, D sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit implique

$$2\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\ [2\pi],$$

d'où

$$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\ [\pi].$$

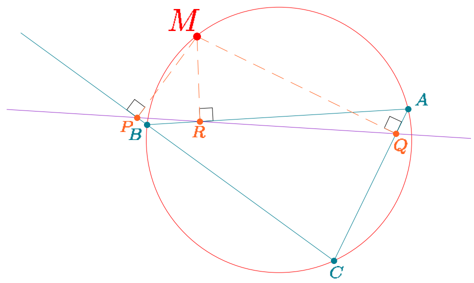
Inversement, on suppose que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\ [\pi]$. Soit alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les deux cercles circonscrits respectivement à ABC et ABD. Soit T (respectivement T') un point de la tangente en A à $calC$ (respectivement à $\mathcal{C}'$) différent de A, le théorème de l'angle au centre nous dit alors que $2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[\pi]$ (respectivement $\left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi]$) d'où:

$$\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right)[\pi],$$

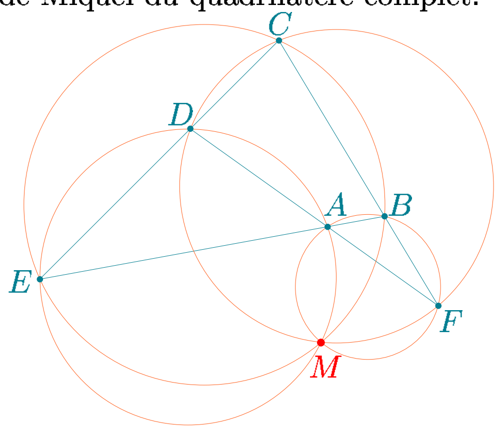
ainsi les droites (AT) et (AT') sont confondues. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent tous les deux par A et B et ont la même tangente en A; ils sont donc confondus et les quatres points sont cocycliques. ∎

Exercices:

(i) *La droite de Simson* Soit ABC un triangle non plat et M un point du plan. Les trois projetés orthogonaux de M sur les droites (AB), (BC), (CA) sont alignés sur une droite, appelée droite de Simson de M, si, et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC.



(ii) *Le point de Miquel* Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet, c'est-à-dire $ABCD$ est convexe, E est l'intersection de (AB) et (CD), F est l'intersection de (BC) et (AD). Les quatres cercles circonscrits aux triangles ADE, ABF, BCE CDF ont un point commun M, appelé point de Miquel du quadrilatère complet.



Démonstration. (i) On écarte le cas trivial où M est en A, B, C. Soit P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les trois droites.
Comme PCM et QCM sont des triangles rectangles qui ont la même hypoténuse, C, P, Q et M sont cocycliques, et l'on a:

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi].$$

Les triangles rectangles RBM et PBM ont également la même hypothénuse, B, P, M, R sont alors cocycliques et on a:

$$\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)[\pi].$$

Puisque $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) \equiv \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) + \left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}\right) [2\pi]$, on a:

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right) + \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right) [\pi].$$

L'alignement de P, Q, R est équivalent à $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) \equiv 0[\pi]$; c'est donc équivalent à $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right) [\pi]$, ce qui est la condition de cocyclicité de M avec ABC, c'est-à-dire l'appartenance de M au cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

(ii) Avec des notations évidentes, soit M le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{ABF}$. Par cocyclicité,

$$\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{DF}\right) [\pi]$$

et

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CB}\right) [\pi].$$

On a alors:

$$\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{DF}\right) + \left(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CB}\right) [\pi]$$

c'est-à-dire:

$$\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right) [\pi],$$

ainsi B, C, E et M sont cocycliques.
De la même manière, on a:

$$\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}\right) [\pi]$$

et

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FC}\right) [\pi],$$

ainsi

$$\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}\right) [\pi]$$

c'est-à-dire C, D, F, M cocycliques.

■

Remarque: Une autre démonstration pour le point de Miquel consiste à voir que les projetés orthogonaux de M sur les quatres côtés du quadrilatère sont alignés (en utilisant la droite de Simson dans les quatres triangles).