Reflexion de l'espace échangeant deux points donnés; plan médiateur, régionnement associé. Etude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.

Pré-requis:

- La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- La définition et principales propriétés d'une application affine.
- La définition de projection orthogonale (En particulier, c'est une application affine).
- La définition d'une isométrie et sa caractérisation par son application vectorielle associée (qui est une application orthogonale).

Cadre: On se place dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

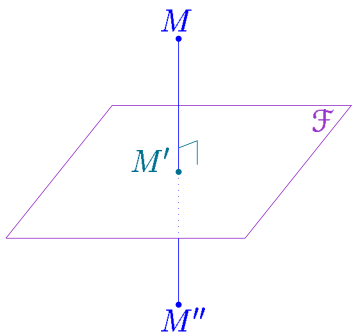
0.1 Réflexion dans l'espace.

Définition 0.1.1.
Soit $\mathcal{F}$ une variété affine de $\mathcal{E}$.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ l'application

$$s_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M'' \end{array}$$

où

$$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'} \quad \text{avec } M' \text{ le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathcal{F}.$$



Remarque: Lorsque $\mathcal{F}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$ on dit que $s_{\mathcal{F}}$ est une réflexion d'axe $\mathcal{F}$.

Proposition 0.1.2.
La symétrie orthogonale est une application affine.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}(M)s_{\mathcal{F}}(N)} &= \overrightarrow{M''N''} \\
&= \overrightarrow{M''M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN''} \\
&= 2\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NN'} \\
&= 2\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{MN'} \\
&= 2\overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{MN}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}} = 2\overrightarrow{p_{\mathcal{F}}} - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ où $p_{\mathcal{F}}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$. ∎

Proposition 0.1.3.
La symétrie orthogonale est une isométrie de $\mathcal{E}$.

Démonstration. En appelant $p_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$, on a:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{PQ}\right) &= \left(2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)} - \overrightarrow{MN}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} - \overrightarrow{PQ}\right) \\
&= 4\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} - 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{PQ} \\
&\quad -2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)}\cdot\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} \\
&= 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} + 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \\
&\quad -2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)}\cdot\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} \\
&= 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)} \\
&\quad -2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(M)p_{\mathcal{H}}(N)}\cdot\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{p_{\mathcal{H}}(P)p_{\mathcal{H}}(Q)}\cdot\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} \\
\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}\left(\overrightarrow{PQ}\right) &= \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}
\end{aligned}$$

∎

Proposition 0.1.4.
La symétrie orthogonale $s_{\mathcal{F}}$ est involutive.

Démonstration. Posons $s_{\mathcal{F}}(M) = M_1$ et $s_{\mathcal{F}}(M_1) = M_2$, alors $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1M'}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \\
&= 2\left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M_1M'}\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM'}\right) \\
&= 2\left(2\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M_1M}\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M}\right) \\
\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

∎

Conséquence: On peut dire qu'une symétrie orthogonale (en particulier une réflexion) échange deux points donnés de l'espace.

0.2 Plan médiateur et régionnement associé.

Théorème 0.2.1.
Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$. L'ensemble

$$\Pi_{A,B} = \{M \in \mathcal{E} \,|\, MA = MB\}$$

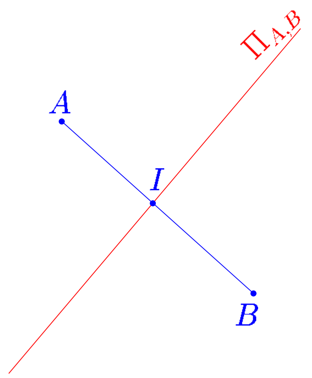
est l'hyperplan affine de $\mathcal{E}$ orthogonal à la droite (AB) et passant par le milieu I du segment $[AB]$.

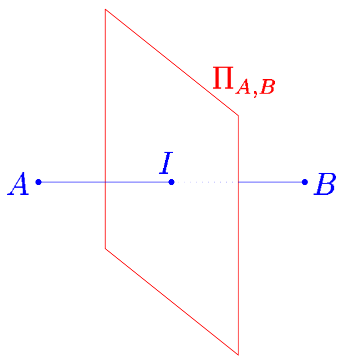
Démonstration.

$$\begin{aligned}
MA = MB &\Leftrightarrow 0 = MA^2 - MB^2 \\
&\Leftrightarrow 0 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \\
&\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} \\
MA = MB &\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI}
\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{MI}$ appartient à l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{AB}$, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{E}$ et $M = I$ vérifie bien l'égalité, donc $\Pi_{A,B}$ est l'hyperplan affine orthogonal à (AB) passant par I. ■

Définition 0.2.2.
L'ensemble $\Pi_{A,B}$ est appelé l'hyperplan médiateur de $[AB]$. En dimension 2, $\Pi_{A,B}$ est appelée la droite médiatrice de A et B et en dimension 3, le plan médiateur de A et B.



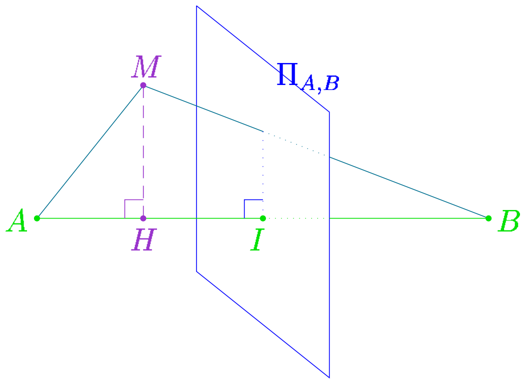


Proposition 0.2.3.
L'hyperplan médiateur $\Pi_{A,B}$ partage $\mathcal{E}$ en deux demi-espace ouverts, l'un contenant A et l'autre B:

$$\Pi_A = \{M \in \mathcal{E} | MA < MB\} \qquad \text{et} \qquad \Pi_B = \{M \in \mathcal{E} | MA > MB\}.$$

Démonstration. Soit M un point de $\mathcal{E}$, alors $MA = MB$, ou $MA > MB$ ou $MA < MB$; il est donc soit dans $\Pi_{A,B}$, soit dans Π_A, soit Π_B.

Si H est le projeté orthogonal de M sur (AB) et I le milieu de $[AB]$;



$$
\begin{aligned}
M \in \Pi_A &\Leftrightarrow MA > MB\\
&\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 < 0\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) < 0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} < 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} < 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} < 0\\
M \in \Pi_A &\Leftrightarrow 2\overline{AB} \cdot \overline{IH} < 0
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $M \in \Pi_A$ si, et seulement si $\overline{IH}$ est de signe opposé à $\overline{AB}$, c'est-à-dire si H est sur la demi-droite ouverte de (AB) délimité par I et contenant A, ou encore si M est dans le demi-espace ouvert délimité par $\Pi_{A,B}$ et contenant A. ∎

0.3 Isométrie ayant une droite de points fixes.

Dans cette partie, $\mathcal{E}$ sera de dimension 3.

Théorème 0.3.1.

Une isométrie $\mathcal{E}$ ayant:

- quatre points fixes non coplanaires est l'identité.
- trois points fixes non alignés et distincte de l'identité est une réflexion.
- deux points A, B distincts sans être ni l'identité, ni une réflexion est la composée de deux réflexions par rapport à des plans sécants suivant (AB).

Démonstration. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$.

- Soient A, B, C, D quatres points non coplanaires fixés par f.
  Supposons qu'il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) \neq M$ et considérons le plan médiateur $\Pi_{M,f(M)}$. Puisque f est une isométrie, $f(M)f(A) = MA$ soit $f(M)A = MA$, donc $A \in \Pi_{Mf(M)}$. On a de même, B, C, D sont dans $\Pi_{Mf(M)}$ ce qui est absurde.
- Soient A, B, C les trois points non alignés fixés par f et $\mathcal{P}$ le plan engendré par A, B et C.
  Nécessairement, il existe $M \notin \mathcal{P}$ tel que $f(M) \neq M$ (sinon f serait l'identité). Soit le plan médiateur $\Pi_{Mf(M)}$ et $s_{\Pi_{Mf(M)}}$ la réflexion de plan $\Pi_{Mf(M)}$. Puisque f est une isométrie, on a comme précédemment, A, B, C sont trois points de $\Pi_{Mf(M)}$.

Considérons maintenant l'application $f \circ s_{\Pi_{Mf(M)}}$, elle fixe A, B, C et M qui ne sont pas coplanaires, donc $f \circ s_{\Pi_{Mf(M)}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et comme $s_{\Pi_{Mf(M)}}$ est involutive, $f = s_{\Pi_{Mf(M)}}$.

- ◇ Soient A et B les deux points fixés par f. Soit M un point n'appartenant pas (AB). Nécessairement, $f(M) \neq M$ sinon d'après ce qui précède, f est une réflexion ou l'identité. Soit alors, le plan médiateur $\Pi_{Mf(M)}$, comme f est une isométrie, A et B sont deux points de $\Pi_{Mf(M)}$ et l'isométrie $f \circ s_{\Pi_{Mf(M)}}$ laisse invariant A, B et M et par ce qui précéde cette application est soit l'identité, soit une réflexion de plan engendré par A, B et M. Ce n'est pas l'identité (en effet, $f \circ s_{\Pi_{Mf(M)}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \Rightarrow f = s_{\Pi_{(Mf(M)}}$ ce qu'on a supposé ne pas être le cas) donc $f \circ s_{\Pi_{Mf(M)}} = s_{(ABM)}$ d'où $f = s_{(ABM)} \circ s_{\Pi_{Mf(M)}}$, or $\Pi_{Mf(M)} \cap (ABM) = (AB)$.

■

Conséquence: Une isométrie fixant deux points distincts de $\mathcal{E}$ fixe une droite.