Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes données; Bissectrices. Application au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangente à un cercle...).

Pré-requis:

- ◇ Notion d'angle orienté de vecteurs; noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et la relation de Chasles.
- ◇ La définition d'une reflexion et ses principales propriétés (en particulier, le fait qu'elle est involutive, qu'elle transforme un angle orienté en son opposé et qu'elle conserve les distances).
- ◇ Définition de droite, demi-plan, demi-droite et segment.
- ◇ La notion de barycentre de points pondérés.
- ◇ Propriétés angulaires d'un triangle et son aire.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.

Notations:

- Pour A et B deux points de $\mathcal{P}$, on notera AB la distance de A à B.
- On notera $\mathrm{Bar}((A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n))$ le barycentre de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pondérés par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

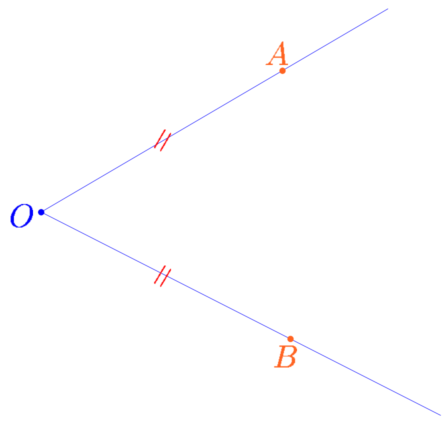
0.1 Reflexion et bissectrice.

Théorème 0.1.1.

Soient $[OA)$ et $[OB)$ deux demi-droites de $\mathcal{P}$, alors il existe une droite Δ telle que la reflexion par rapport à Δ échange $[OA)$ et $[OB)$. On dit alors que Δ est la bissectrice de $[OA)$ et $[OB)$.

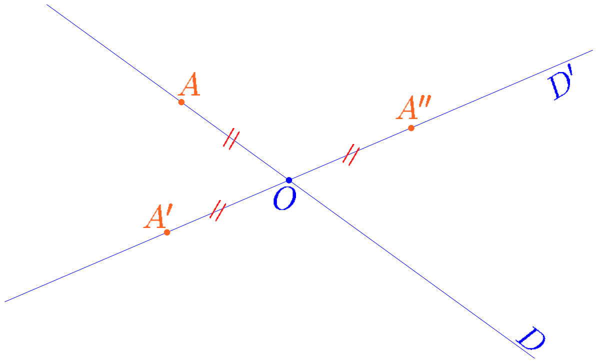
Les bissectrices de deux droites affines sécantes D et D' sont les axes des deux reflexions qui échangent ces deux droites.

Démonstration. • Cas des demi-droites:



On peut supposer $OA = OB$, une reflexion qui échange les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ échange A et B, car une reflexion conserve les distances et son axe est donc la médiatrice de $[AB]$. Réciproquement, la médiatrice Δ de $[AB]$ passe par O (car $OA = OB$), ce qui implique que la reflexion d'axe Δ échange $[OA)$ et $[OB)$.

- Cas des droites:



Soit O l'intersection de D et D'. Soit A un point de D distinct de O et A', A'' les points de D' tels que $OA = OA' = OA''$. Une reflexion échangeant D et D' conserve O et transforme A en A' ou A'' (car une reflexion conserve les distances). L'axe de cette reflexion est donc la médiatrice de $[AA']$ ou la médiatrice de $[AA'']$. La réciproque est identique aux demi-droites.

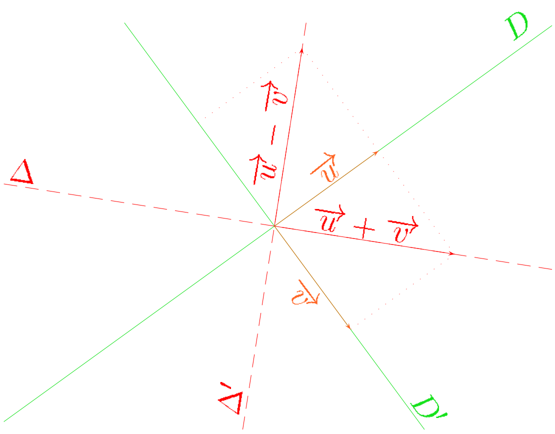
■

Remarque: Si I est le milieu de $[AB]$, la reflexion d'axe la médiatrice de $[AB]$ transforme O en O, I en I et A en B, or une reflexion inversant les angles orientés, on a donc:

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}\right) [2\pi].$$

0.2 Propriétés des bissectrices.

Propriété 0.2.1.
Soient D et D' deux droites de $\mathcal{P}$ et Δ, Δ' leurs bissectrices.
Alors, les droites Δ et Δ' sont orthogonales.



Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires de D et D'.
Vérifions que Δ est dirigée par $\vec{u} + \vec{v}$ et Δ' par $\vec{u} - \vec{v}$.

En effet, $\overrightarrow{u}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$, ainsi, d'après la relation de Chasles, on a:

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\,[2\pi]$$

et

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\,[2\pi]$$

d'où

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=-(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})\,[2\pi].$$

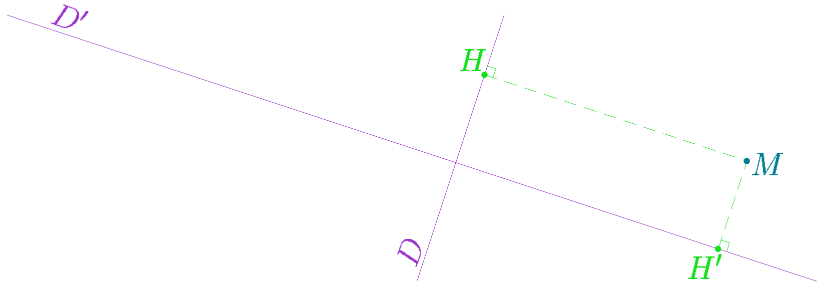
Or une réflexion tranformant un angle orienté en son opposé, cela signifie que la reflexion d'axe $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ échange $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Donc, par exemple, Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et on a de même que Δ' admet $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ pour vecteur directeur. Or

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=1-1=0,$$

donc Δ et Δ' sont orthogonales. ■

Propriété 0.2.2.
La réunion des bissectrices d'un couple (D,D') de droites sécantes de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points du plan qui sont équidistants de D et D'.

Démonstration. On note respectivement H et H' les projections orthogonales d'un point M du plan sur D et D'.



Si M appartient à Δ (respectivement Δ') alors, la reflexion d'axe Δ (respectivement Δ') échange D et D' et laisse fixe M. Or une reflexion conservant les distances, la distance de M à D est égale à la distance de M à D'.

Réciproquement, si M est équidistant de D et D'. Soit δ la médiatrice de $[HH']$, alors δ passe par M car le triangle HMH' est isocèle en M. Ainsi, la réflexion d'axe δ échange H et H' et échange la perpendiculaire à MH passant par H (c'est-à-dire D) en la perpendiculaire à MH' passant par H' (c'est-à-dire D'), c'est donc une des deux réflexions échangeant D et D'. Par conséquent, δ est l'une des bissectrices. ■

0.3 Applications.

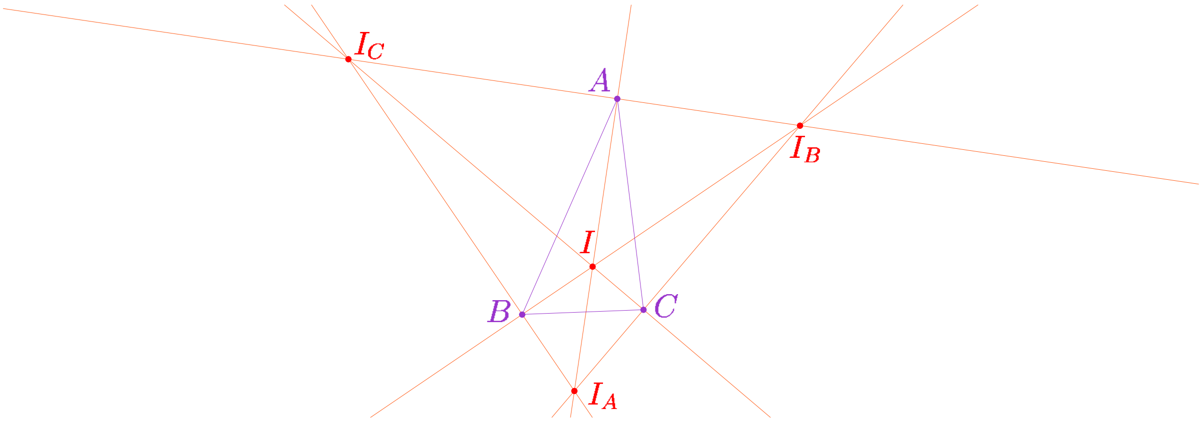
0.3.1 Application au triangle.

✎ **Définition 0.3.1.**

Soit ABC un triangle non plat de $\mathcal{P}$. Les trois bissetrices des trois demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, $[BC)$ et $[BA)$, $[CA)$ et $[CB)$ sont appelées les bissectrices intérieures du triangle ABC. Les trois bissectrices de (AB) et (AC), (BC) et (BA), (CA) et (CB) distinctes des bissectrices intérieures sont appelées les bissectrices extérieures du triangle ABC.

✎ Théorème 0.3.2.

Soit ABC un triangle non plat et $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Ses trois bissectrices intérieures sont concourantes en le barycentre I de (A, a), (B, b) et (C, c). La bissectrice intérieure issue de A (respectivement de B; respectivement de C) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de B et C (respectivement de C et A; respectivement de A et B) en le barycentre I_A de $(A, -a)$, (B, b) et (C, c) (respectivement I_B de (A, a), $(B, -b)$ et (C, c); respectivement I_c de (A, a), (B, b) et $(C, -c)$).



Démonstration. Puisque $I = \mathrm{Bar}((A, a), (B, b), (C, c))$, alors $(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$, ainsi $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire à $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ et par conséquent à

$$\frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{bc} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}.$$

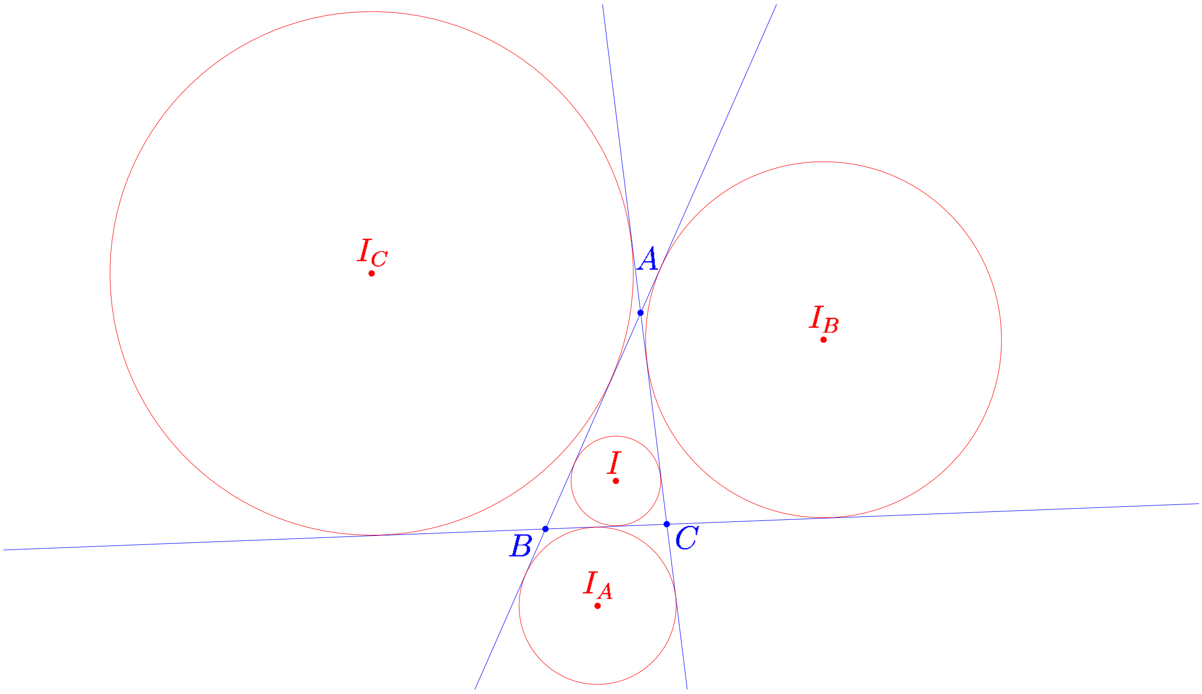
Ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et dirige donc la bissectrice intérieure en A. Par suite, le point I est sur cette dernière. La même démonstration montrera que I est aussi sur les autres bissectrices intérieures de ABC.

$I_A = \mathrm{Bar}((A, -a), (B, b), (C, c))$, alors $(-a+b+c)\overrightarrow{AI_A} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ et en procédant comme précédemment on montre que I_A est sur la bissectrice intérieure en A. Ce barycentre I_A vérifie également $(-a+b+c)\overrightarrow{BI_A} = -a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$; on en déduit que $\overrightarrow{BI_A}$ est colinéaire à

$$\frac{-a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}}{ac} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a} - \frac{\overrightarrow{BA}}{c},$$

comme ce dernier est la soustraction de deux vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, il dirige la bissectrice extérieure en B et I_A se trouve donc sur celle-ci. De même la relation $(-a+b+c)\overrightarrow{CI_A} = -a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$ implique que I_A est sur la bissectrice extérieure en C, d'où la dernière propriété de l'énoncé. ■

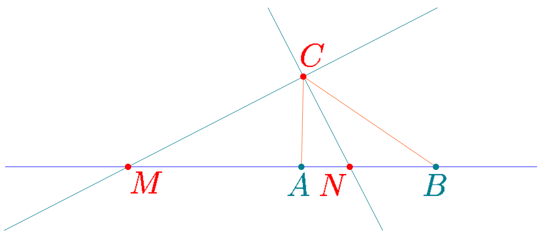
Remarque: I, I_A, I_B et I_C sont les centres de trois cercles tangents aux côtés du triangle, celui de centre I est appelé le cercle inscrit au triangle ABC et les trois autres sont appelés cercles exinscrits au triangle.



Propriété 0.3.3.
Soit ABC un triangle non plat de $\mathcal{P}$ et M, N les intersections de la droite (BC) avec les bissectrices en A. Alors,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}.$$

Démonstration. Démontrons que $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$:



En notant $\mathrm{d}(A,(BC))$ la distance du point A à la droite (BC) et $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC, on a:

$$2 \cdot \mathcal{A}_{ABM} = AB \cdot \mathrm{d}(M,(AB)) = BM \cdot \mathrm{d}(A,(BC))$$

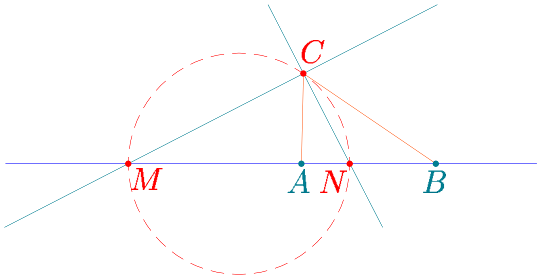
et

$$2 \cdot \mathcal{A}_{ACM} = AC \cdot \mathrm{d}(M,(AC)) = CM \cdot \mathrm{d}(a,(BC)).$$

Puisque M appartient à la bissectrice en A, on a $\mathrm{d}(M,(AB)) = \mathrm{d}(M,(AC))$, ainsi en faisant le quotient des deux égalités précédentes, on obtient le résultat souhaité. On fait de même pour l'autre égalité. ∎

0.3.2 Application au cercle.

Proposition 0.3.4.
Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$ et k un réel positif distinct de 1. L'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\frac{MA}{MB} = k$ appartient à un cercle.



Démonstration. Soit C un point de $\mathcal{P}$ vérifiant $\frac{CA}{CB} = k$. Les bissectrices δ et δ' des droites (CA) et (CB) coupent (AB) en N et N'; si ce n'est pas le cas l'une des deux bissectrices, par exemple δ est parallèle à (AB) et comme δ' est orthogonale à δ, elle est aussi orthogonale à (AB) et la bissectrice en C du triangle ACB est aussi la hauteur de ce triangle ce qui implique que ACB est isocèle en C et $\frac{CA}{CB} = 1$, ce qui contredit l'hypothèse. Or d'après la proposition précédente $\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B} = k$ donc M et N ne dépendent que de k et non du choix de C. Or (CN) et (CN') sont perpendiculaires; donc C se situe sur le cercle de diamètre NN', il en résulte que le lieu recherché est situé sur un cercle de diamètre NN'. ■

Remarque: Il est possible de démontrer que ce lieu est en fait tout le cercle, qui est appelé cercle d'Apollonius.

✎ **Propriété 0.3.5.**
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Si les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et en B se coupent en M, alors O est sur l'une des bissectrices de MA et MB et $MA = MB$.

Démonstration. La première assertion découle directement du fait que O est équidistant de A et B et le reste devient immédiat, en considérant la réflexion d'axe (OM). ■