Etude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distance.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ de plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Pré-requis:

◇ La connaissance de la structure d'espace affine du plan (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
◇ La notion d'application affine.
◇ Définition et propriétés des isométries euclidienne du plan, avec leur classification (On notera $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$ le groupe des isométrie de $\mathcal{P}$).
◇ Definition et propriétés des homothéties affines.
◇ L'identification de $\mathbb{C}$ au plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (En particulier, l'interprétation géométrique du module et de l'argument).

◇ Notion d'angle orienté de vecteurs.
◇ La définition d'une transformation du plan.

Notations: Dans cet exposé, on notera $H_{I,k}$ l'homothétie de centre I et de rapport k ($k \in \mathbb{R}_+^*$), $R_{I,\theta}$ la rotation de centre I et d'angle θ et s_Δ la réflexion d'axe Δ.

0.1 Les similtudes affines.

Définition 0.1.1.
Une similitude de $\mathcal{P}$ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui conserve les rapports de distances, c'est-à-dire telle que

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (M,N) \in \mathcal{P}^2, \qquad f(M)f(N) = k \cdot MN.$$

Le nombre k est appelé rapport de la similitude f et on désignera par $\mathrm{Sim}(\mathcal{P})$ l'ensemble des similitudes de $\mathcal{P}$.

Remarques: Une isométrie est une similitude directe de rapport 1. Toute homothétie affine de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème 0.1.2.
Toute similitude de rapport k est, d'une infinité de façons, le produit d'une isométrie par une homothétie de rapport k.

Démonstration. Le produit de deux similitudes de rapports k et k' multiplie les distances par kk'; c'est donc encore une similitude.

Soit f une similitude de rapport k, par ce qui précède, $f \circ H_{I,\frac{1}{k}}$ est une similitude de rapport $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, c'est donc un isométrie g. Ainsi, $f = g \circ H_{I,k}$. ∎

Conséquences:

- ⋄ Une similitude est une transformation affine de partie linéaire le produit des parties linéaires de l'isométrie et de l'homothétie.
- ⋄ L'ensemble $\mathrm{Sim}(\mathcal{P})$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Remarques: Comme une homothétie de rapport positif conserve les angles orientés, il y a deux types de similitudes affines corrspondant respectivement à une décomposition faisant intervenir un déplacement ou un antidéplacement: les similitudes affines directes et les similitudes affines indirectes qui, respectivement, conservent ou inversent les angles orientés. Les similitudes affines directes $\mathrm{Sim}(\mathcal{P})$ forment un sous-groupe de $\mathrm{Sim}(\mathcal{P})$.

Théorème 0.1.3.

Toute similitude de rapport $k \neq 1$, possède un unique point fixe (appelé centre de la similitude) et s'écrit de façon unique, comme le produit commutatif d'une homothétie de rapport k par une isométrie à point fixe.

Démonstration. Soit f une similitude de rapport $k \neq 1$ et de partie linéaire $\overrightarrow{f}$. Soient O un point fixé de $\mathcal{P}$ et M un point quelconque de $\mathcal{P}$. Posons $O' = f(O)$. Le point M est fixe par f si, et seulement si

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'M} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\right)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'O}.\end{aligned}$$

Cette équation vectorielle en M possède une unique solution si, et seulement si l'application $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ est bijective. Il suffit pour cela de constater qu'elle est injective (car on est en dimension finie), or

$$\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\right) = \left\{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \,\middle|\, \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right\} = \overrightarrow{0},$$

car $\overrightarrow{f}$ multiplie les norme par $k \neq 1$. L'application f possède donc un unique point fixe I.

D'après le premier théorème, $f = H_{I,k} \circ g$ avec g une isométrie. Alors, $g = H_{I,\frac{1}{k}} \circ f$ qui possède I pour point fixe. De plus, la partie linéaire de l'homothétie est $k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, par conséquent elle commute avec la partie linéaire de g et possède un point fixe I commun, donc $H_{I,k}$ et g commutent.

En effet, si $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ et $f(I) = g(I) = I$, soit M un point de $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{IM}\right) &= \overrightarrow{f \circ g}\left(\overrightarrow{IM}\right) \qquad \text{(Par fonctorialité)} \\ &= \overrightarrow{f \circ g(I) f \circ g(M)} \\ &= \overrightarrow{I f \circ g(M)}.\end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{I g \circ f(M)}$, ainsi $\overrightarrow{I f \circ g(M)} = \overrightarrow{I g \circ f(M)}$ d'où $f \circ g = g \circ f$.

Supposons qu'il existe une seconde décomposition commutative $f = H_{J,k} \circ h = h \circ H_{J,k}$ alors $H_{J,k}(h(J)) = h(H_{J,k}(J)) = h(J)$, donc $h(J)$ est un point fixe de $H_{J,k}$ c'est-à-dire $h(J) = J$ et par conséquent J est un point fixe de f, or elle n'en possède qu'un, donc $I = J$ et $H_{J,k} = H_{I,k}$, or $h = H_{J,\frac{1}{k}} \circ f = H_{I,\frac{1}{k}} \circ f = g$ d'où l'unicité. ∎

0.2 Classification et caractérisation d'une similitude affine.

Théorème 0.2.1.
Une similitude affine est soit:

- Une isométrie: déplacement (identité, translation, rotation) ou antidéplacement (réflexion ou symétrie glissée).
- Une similitude directe à centre: le produit commutatif $S_{I,k,\theta} := H_{I,k} \circ R_{I,\theta}$ avec $k \neq 1$.
- Une similitude indirecte à centre: le produit commutatif $S_{I,k,\Delta} := H_{I,k} \circ s_{\Delta}$ avec Δ passant par I.

On dira que θ est l'angle de la similitude directe à centre et Δ est l'axe de la similitude indirecte à centre.

Démonstration. Si $k = 1$ c'est une isométrie.

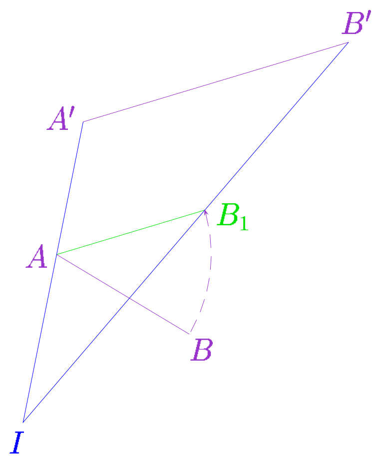
Si $k \neq 1$, on a vu que la similitude affine f possède un unique point fixe I et s'écrit de manière unique comme le produit commutatif $H_{I,k} \circ g$ avec g une isométrie de centre I. Or toute homothétie plane conserve les angles orientés, donc f est directe si, et seulement si g est directe et dans ce cas g est une rotation de centre I. Et, f est indirecte si g est indirecte et dans ce cas c'est une réflexion d'axe passant par I. ∎

Théorème 0.2.2.
Soient (A, B) et (A', B') deux couples de $\mathcal{P}$ tels que $A \neq A'$ et $B \neq B'$. Il existe une unique similitude directe (respectivement indirecte) transformant (A, B) en (A', B').

Démonstration. Si $AB = A'B'$ avec (AB) parallèle à $(A'B')$, alors la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ tranforme (A, B) en (A', B') et c'est une similitude directe.

Si $AB = A'B'$ avec (AB) non parallèle à $(A'B')$, alors on note O le point de concours de (AB) et $(A'B')$ et la rotation de centre O et d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ transforme (A, B) en (A', B') et c'est une similitude directe.

Si $AB \neq A'B'$;



Alors la rotation r de centre A et d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ envoie $[AB]$ sur $[AB_1]$ avec (AB_1) parallèle à $(A'B')$. Soit maintenant I le point d'intersection de (AA') et (B_1B') (I existe, sinon $AA'B'B_1$ serait un parallèlogramme et $A'B' = AB_1 = AB$). Ainsi l'homothétie h de centre I, de rapport $\frac{A'I}{AI}$ transforme (A, B_1) en (A', B') et $h \circ r$ transforme (A, B) et (A', B') et c'est une similitude directe.

Dans tous les cas, si on compose les similitudes trouvées par une réflexion d'axe $(A'B')$ on trouvera une similitude indirecte transformant (A, B) en (A', B').

Supposons maintenant qu'il existe une autre similitude directe (respectivement indirecte) h transformant (A, B) en (A', B'). En composant les similitudes trouvées précédemment avec h^{-1}, on trouve toujours une similitude directe possédant deux points fixes. Une telle similitude à un rapport égal à $\frac{AB}{AB} = 1$; c'est donc un déplacement. Or un déplacement possédant deux points fixes est l'identité, d'où l'unicité recherchée. ∎

0.3 Ecriture complexe.

Pour cette partie, on muni $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on l'identifie à $\mathbb{C}$.

Théorème 0.3.1.
Les similitudes de $\mathcal{P}$ sont les applications dont la forme complexe est du type $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $|a|$ est égal au rapport de la similitude.

Démonstration. On sait qu'une similitude f est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie. La forme complexe de cette homothétie est du type $z \mapsto kz+\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et celle de l'isométrie est du type $z \mapsto e^{i\theta}z + \beta$ $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z} + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{C}$. Par composition, on en déduit que f s'écrit $z \mapsto az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $|a| = k$.

Inversement, soit f une transformation plane dont la forme complexe est du type $z \mapsto az+b$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On peut écrire $a = ke^{i\theta}$, ainsi f est la composée de $z \mapsto kz$ par $z \mapsto e^{i\theta}z + b$, f est donc la composée d'une similitude de rapport k et d'un déplacement, c'est donc une similitude directe de rapport $k = |a|$.

Enfin, soit f une transformation plane dont la forme complexe est du type $z \mapsto a\overline{z}+b$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Cette application est la composée de $z \mapsto \overline{z}$ par $z \mapsto az + b$; f est donc la composée de la reflexion d'axe (Ox) par une similitude directe: c'est une similitude directe de rapport $k = |a|$. ∎

0.4 Applications.

0.5 Les triangles semblables.

Définition 0.5.1.
Deux configurations du plan sont dites semblables (respectivement directement semblables; respectivement indirectement semblables) lorsque l'une d'elles est l'image de l'autre par une similitude (respectivement une similitude directe; respectivement une similitude indirecte).

Théorème 0.5.2.
Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables par une similitude f qui transforme A en A', B en B' et C en C' si, et seulement si on a l'une des trois conditions équivalentes suivantes:

1. $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.
2. $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (d'où $\widehat{C} = \widehat{C'}$).
3. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, on a besoin d'un lemme traitant des cas d'égalité des triangles:

Lemme 0.5.3.
Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux par l'isométrie g qui transforme respectivement A en A', B en B' et C en C' si, et seulement si on a l'une des trois conditions équivalentes suivantes:

(a) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$.

(b) $BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

(c) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $AC = A'C'$

Démonstration. Les trois conditions sont évidemment nécessaires.

Si le (a) est vérifié et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi]$, alors il existe un unique déplacement g envoyant (A, B) sur (A', B'). Soit C_1 l'image de C par g, alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C_1}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi]$ et par hypothèse $A'C' = A'C_1$ donc $C' = C_1$; par conséquent, ABC et $A'B'C'$ sont égaux (même directement égaux). Si le 1. est vérifié et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi]$, alors il existe un unique antidéplacement g envoyant (A, B) sur (A', B') et le même raisonnement montre que ABC et $A'B'C'$ sont indirectement égaux.

Si le (b) est vérifié et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}\right)[2\pi]$, alors comme $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}\right)$ sont respectivement de même sens que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}\right)$, on a aussi $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}\right)[2\pi]$; $[BC]$ et $[B'C']$ se correspondent par un déplacement g qui transforme A en A_1 tel que $\left(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}\right) = \left(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A_1}\right)[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}\right) = \left(\overrightarrow{C'A_1}, \overrightarrow{C'B'}\right)[2\pi]$; ces égalités impliquent $A' = A_1$ et le résultat. La démonstration est analogue pour $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = -\left(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}\right)[2\pi]$ en prenant pour g un antudéplacement.

Si le (c) est vérifié, alors il existe une isométrie g (un déplacement ou un antidéplacement) envoyant (A, B) sur (A', B'). Soit C_1 l'image de C par g, alors $A'C_1 = AC = A'C'$ et $B'C_1 = BC = B'C'$. Ainsi C_1 se situe (comme C) sur l'une des intersections du cercle de centre A', de rayon AC et du cercle de centre B', de rayon BC. Suivant que C est sur l'une ou l'autre des intersections, on choisi un déplacement ou un antidéplacement. ∎

Comme une similitude conserve les angles et multiplie les longueurs par une constante k, les trois conditions du théorème sont nécéssaires.

Inversement, si le 1. est verifié (respectivement le 2.; respectivement le 3.) et si $k = \frac{A'B'}{AB}$, une homothétie de centre quelconque et de rapport $\frac{1}{k}$ transforme $A'B'C'$ en un triangle

$A''B''C''$ isométrique à ABC en vertu du (a) (respectivement (b); respectivement (c)) du lemme. La composée de l'isométrie qui transforme ABC en $A''B''C''$ par l'homothétie inverse de la précédente est une similitude qui transforme ABC en $A'B'C'$. ∎

Remarques: L'énoncé utilise des angles géométriques; s'il y a égalité des angles orientés correspondants, la similitude est directe et s'ils sont opposés, elle est indirecte.

0.6 Les rectangles semblables; format d'un rectangle.

Définition 0.6.1.
Le format d'un rectangle est le rapport φ de sa longueur à sa largeur (c'est-à-dire du côté le plus long divisée par celle du côté le plus court).

Proposition 0.6.2.
Deux rectangles sont semblables si, et seulement si il ont le même format.

Démonstration. Soit $ABCD$ un rectangle et $A'B'C'D'$ un autre rectangle. Il suffit de considérer le triangle ABC rectangle en A et $A'B'C'$ rectangle en A' et le premier cas de similitude des triangles donne le résultat. ∎

L'application pratique du format est le suivant:

Proposition 0.6.3.
Soient $ABCD$ un rectangle, et $BCEF$ le rectangle tel que E et F appartiennent aux grands côtés de $ABCD$.
Les rectangles $ABCD$ et $BCEF$ sont semblables si, et seulement si les digonales $[AC]$ et $[BE]$ sont orthogonales. Les deux centres de similitudes directes entre $ABCD$ et $BCEF$ sont alors à l'intersection de diagonales, en $[AC] \cap [BE]$ et $[BD] \cap [CF]$.

Démonstration. S'il existe une telle similitude f de centre Ω et de rapport $k = \frac{BC}{AB}$, elle transforme $[AB]$ en $[BC]$ ou $[EF]$, son angle est donc $\pm\frac{\pi}{2}$; selon le signe, le quadruplet (A, B, C, D) est transformé en (B, C, E, F) ou en (E, F, B, C) et, dans les deux cas, la diagonale $[AC]$ en $[BE]$ qui sont donc orthogonales. La similitude f^2 à pour angle π, c'est donc une homothétie $H_{\Omega,-k^2}$ de même centre que f. Si l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$, f^2 transforme (A, B, C, D) en (C, E, F', C') et, par suite, son centre est sur $[AC] \cap [BE]$. Le même raisonnement montre qu'une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme $ABCD$ en $EFCB$ a son centre Ω' à l'intersection des deux diagonales orthogonales $[BD]$ et $[CF]$.

Inversement, si (AC) et (BE) sont orthogonales en Ω (et (BD) et (EF) orthogonales en Ω') les deux similitudes directes de rapport k, de centres respectifs Ω et Ω', d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ transforment $ABCD$ en $BCEF$ (en effet, pour l'angle $\frac{\pi}{2}$, l'image de $ABCD$ est un rectangle aux côtés parallèles à ceux de $ABCD$ et l'image de la diagonale $[AC]$ est $[BE]$). ∎

Exemples:

- Le format commercial: c'est le format normalisé (désigné par les sigles $A1$, $A2$, $A3$, $A4$,...) du papier commercialisé pour les bureaux; égal à $\sqrt{2}$, il correspond à des points E et F situés en les milieux respectifs de $[CD]$ et $[AB]$. Ainsi la découpe d'une feuille de papier en deux partie égale fournit deux feuilles de même format.
- Le rectangle d'or: le format est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; cela correspond au fait que $AFED$ est un carré. Ainsi, le petit rectangle est à la fois semblable au grand et "complémentaire" d'un carré.