Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.

Pré-requis:

◇ Ecriture sous forme exponentielle et sous forme trigonométrique d'un nombre complexe.

◇
$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases}$$

◇ Représentation géométrique d'un nombre complexe dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

◇ Définition d'un groupe cyclique.

◇ Définition d'une similitude directe.

0.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

Définition 0.1.1.
Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier supérieur à 1.
Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue ω:

$$\omega^n = Z$$

sont appelées les racines $n^{\text{ièmes}}$ du nombre complexe Z.

Remarque: 0 admet 0 comme unique racine $n^{\text{ième}}$.

Explicitons ces racines:

Posons $Z = re^{i\alpha}$ et $\omega = \rho e^{i\theta}$, on a:

$$\begin{aligned} (\rho e^{i\theta})^n = re^{i\alpha} \quad &\Leftrightarrow \quad \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + 2\frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, l'argument de z prend n valeurs distinctes obtenues pour $k = 0$, $k = 1$, $\ldots$, $k = n - 1$.

Il y a donc n racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z distinctes:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Exercice: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$z^3 = 1 + i.$$

Démonstration. $|1+i| = \sqrt{2}$ donc

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

d'où

$$\omega_k = \sqrt[3]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

■

Définition 0.1.2.
On désigne par l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité l'ensemble:

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2i\pi k}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

Proposition 0.1.3.
$\mathbb{U}_n$ est le seul sous-groupe multiplicatif d'ordre n de $\mathbb{C}^*$. De plus, $\mathbb{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$:
- $1 \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $(\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n^2$, alors $(\omega\omega')^n = \omega^n \, {\omega'}^n = 1$ donc $\omega\omega' \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $\omega \neq 0$, $\left(\frac{1}{\omega}\right)^n = \frac{1}{\omega^n} = 1$ donc $\frac{1}{\omega} \in \mathbb{U}_n$ et $\frac{1}{\omega} \cdot \omega = 1$.

Montrons maintenant que c'est le seul sous-groupe multiplicatif d'ordre n de $\mathbb{C}^*$: Soit G un tel sous-groupe et z un élément de G, alors $z^n = 1$ ce qui implique que $z \in \mathbb{U}_n$ donc $G \subseteq \mathbb{U}_n$. Donc $G = \mathbb{U}_n$ car ils ont le même cardinal.

Il ne reste plus qu'à démontrer que $\mathbb{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{N}$: Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ & \overline{k} & \longmapsto & \omega_k := e^{\frac{2i\pi k}{n}} \end{array}.$$

Tout d'abord, φ est bien définie: Soient k et k' dans $\mathbb{Z}$ tels que $\overline{k} = \overline{k'}$ alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $k = k' + mn$, ainsi

$$\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} = e^{\frac{2i\pi k'}{n}} \cdot \underbrace{e^{2i\pi m}}_{=1} = \omega_{k'}.$$

Soit $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$,

$$\varphi\left(\overline{k} + \overline{k'}\right) = \varphi\left(\overline{k + k'}\right) = \omega_{k+k'} = e^{\frac{2i\pi}{n}(k+k')} = \omega_k \cdot \omega_{k'} = \varphi\left(\overline{k}\right) \cdot \varphi\left(\overline{k'}\right).$$

Donc φ est un morphisme de groupe multiplicatif. Vérifions que φ est bijective:

$$\mathrm{Ker}\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} | \omega_k = 1\right\} = \left\{\overline{0}\right\}.$$

Par conséquent φ est un injective, de plus $|\mathbb{Z}/n\mathbb{N}| = n = |\mathbb{U}_n|$ donc φ est bijective. ■

Conséquence: L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est un groupe cyclique.

Exercice: Montrer que $e^{\frac{2ip\pi}{n}}$ est générateur de $\mathbb{U}_n$ si, et seulement si p et n sont premiers entre eux.

Définition 0.1.4.
Un générateur de $\mathbb{U}_n$ est appelé racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Définition 0.1.5.
On appelle fonction symétrique élémentaire à n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les n fonctions notées

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

Proposition 0.1.6.
Soient $\omega_k := e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Alors, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\sigma_k = \sigma_k(1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) = 0.$$

Démonstration. En effet, les ω_k étant les racines de $X^n - 1$, on a:

$$X^n - 1 = (X-1) \cdot (X - \omega_1) \cdot (X - \omega_2) \cdot \ldots \cdot (X - \omega_{n-1}).$$

En développant le deuxième terme, on obtient:

$$X^n - 1 = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \ldots + (-1)^n \sigma_n,$$

d'où le résultat. ■

Remarque: En particulier, si ω est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité distincte de 1, alors

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0.$$

0.2 Interprétation géométrique.

Proposition 0.2.1.
Soit $u \in \mathbb{C}^*$ s'écrivant $u = re^{i\theta}$.
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de u se situent sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
Si $n = 2$, alors les racines carrées de u sont diamétralement opposées sur $\mathcal{C}$.
Si $n \geq 3$, alors les racines $n^{\text{ièmes}}$ de u sont les sommets d'un polygone régulier.

Démonstration. Puisque toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de u ont le même module $\sqrt[n]{r}$, leurs images appartiennent bien à $\mathcal{C}$.

Deux racines $n^{\text{ièmes}}$ successives se déduisent toujours par une rotation d'angle $\frac{\theta}{n}$. ■

Proposition 0.2.2.
Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de u se déduisent des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité par une similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt[n]{r}$ et d'angle $\frac{\arg u}{n}$.

Démonstration. Soient

$$z_k = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

les racines $n^{\text{ièmes}}$ de u et $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $k \in [\![0, n-1]\!]$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Soient h l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt[n]{r}$ et ρ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\theta}{n}$.

$$\begin{aligned}
(h\circ\rho)(\omega_k) &= h\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}\right)\\
&= h\left(e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\\
(h\circ\rho)(\omega_k) &= z_k.
\end{aligned}$$

■

0.3 Applications.

0.3.1 Résolution des équations du second, troisième et quatrième degré.

Problème 1: Résoudre dans $\mathbb{C}$, pour $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $a\neq 0$ l'équation:

$$az^2+bz+c=0.$$

Démonstration.

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0.$$

En posant $\Delta = b^2-4ac$ (c'est le discriminant de l'équation),

- Si $\Delta = 0$, alors $z = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ et $-\delta$ sont les racines carrées de Δ.

■

Exercice: Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^8+z^4+1=0.$$

Problème 2: Résoudre dans $\mathbb{C}$, pour $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, l'équation:

$$z^3+az^2+bz+c=0.$$

Trouvons une translation permettant de supprimer les termes en z^2: posons $y := z+k$, l'équation devient:

$$(y-k)^3+a(y-k)^2+b(y-k)+c=0,$$

soit en développant,

$$y^3 - 3ky^2 + 3k^2y - k^3 + ay^2 - 2aky + ak^2 + by - bk + c = 0,$$

et en ordonnant les termes, on obtient:

$$y^3 + (a-3k)y^2 + (3k^2 - 2ak + b)y + c - bk + ak^2 - k^3 = 0.$$

Ainsi, en prenant $k = \frac{a}{3}$, on a:

$$y^3 + \underbrace{\left(b - \frac{a^2}{3}\right)}_{:=p} \cdot y + \underbrace{c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}}_{:=q} = 0.$$

Si $p = 0$, alors les solutions sont les racines cubiques de $-q$.
Si $p \neq 0$, alors on cherche les solutions de la forme $y = u + v$:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0 \end{aligned}$$

En imposant $3uv + p = 0$, notre équation devient:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}$$

ce qui implique (on perd l'équivalence ici) que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Donc u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation du second degré:

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0,$$

son discriminant vaut: $\delta = \frac{27q^2+4p^3}{27}$ ainsi d'après notre problème 1:

$$\begin{cases} u^3 = \dfrac{-q - \sqrt{\delta}}{2} \\ v^3 = \dfrac{-q + \sqrt{\delta}}{2} \end{cases}$$

Soit r une racine cubique de u^3, alors $u = r$, rj ou rj^2 où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Pour récupérer l'équivalence avec notre équation précédente, on reprend la condition $3uv = -p$, ce qui nous donne les trois solutions:

$$(u,v) = \left(r, \frac{-p}{3r}\right), \left(rj, \frac{-pj^2}{3r}\right) \text{ et } \left(rj^2, \frac{-pj}{3r}\right),$$

d'où les solutions de notre problème initial:

$$\begin{cases} z_1 = r - \dfrac{p}{3r} - \dfrac{a}{3} \\ z_2 = rj - \dfrac{pj^2}{3r} - \dfrac{a}{3} \\ z_3 = rj^2 - \dfrac{pj}{3r} - \dfrac{a}{3} \end{cases}$$

Exercice: Trouver avec la méthode précédente la solution réelle de l'équation $Y^3 + Y - 2 = 0$ et donner une relation entre irrationnels.

Démonstration. Avec les même notations que dans la méthode proposée, on a:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ 3uv = \frac{-1}{3} \end{cases},$$

on a alors l'équation: $z^2 - 2z - \frac{1}{27} = 0$ c'est-à-dire:

$$u^3 = 1 + \sqrt{\frac{28}{27}} \qquad \text{et} \qquad v^3 = 1 - \sqrt{\frac{28}{27}}.$$

D'où la solution réelle à l'équation proposée:

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

Or 1 est une racine évidente de cette équation, donc

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = 1.$$

∎

Problème 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^3$, l'équation:

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0.$$

Cherchons une translation permettant de supprimer les termes en z^3, posons $y := z + k$. L'équation devient:

$$(y - k)^4 + a(y - k)^3 + b(y - k)^2 + c(y - k) + d = 0,$$

soit en développant,

$$y^4 - 4ky^3 + 6k^2y^2 - 4k^3y + k^4 + ay^3 - 3aky^2 + 3ak^2y - ak^3 + by^2 - 2bky + bk^2 + cy - ck + d = 0,$$

et en ordonnant

$$y^4 + (a - 4k)y^3 + (6k^2 - 3ak + b)y^2 + (3ak^2 - 4k^3 - 2bk + c)y + k^4 - ak^3 + bk^2 - ck + d = 0.$$

Ainsi, en prenant $k = \frac{a}{4}$, on obtient:

$$y^4 + \underbrace{\left(b - \frac{3a^2}{8}\right)}_{:=p} \cdot y^2 + \underbrace{\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)}_{:=q} \cdot y + \underbrace{\frac{a^2b}{16} - \frac{3a^4}{256} - \frac{ac}{4} + d}_{:=r} = 0.$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\left(y^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = y^4 + xy^2 + \frac{x^2}{4} = (x - p)y^2 - qy + \frac{x^2}{4} - r.$$

On va donc chercher x_0 tel que le deuxième terme soit un carré. Pour cela, il faut que le discriminant δ de cette équation en y soit nul, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} q^2 - 4(x-p)\left(\frac{x^2}{4} - r\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad q^2 - x^3 + 4rx + px^2 - 4pr = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 - px^2 - 4rx + 4pr - q^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation admet des solutions d'après la méthode précedente, soit alors x_0 une de ces solutions, on obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \left(y^2 + \frac{x_0}{2}\right)^2 = (my+n)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(y^2 + \frac{x_0}{2}\right)^2 - (my+n)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y^2 + \frac{x_0}{2} - my - n\right) \cdot \left(y^2 + \frac{x_0}{2} + my + n\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y^2 - my + \frac{x_0}{2} - n = 0 \\ y^2 + my + \frac{x_0}{2} + n = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

et se sont deux équations résolubles d'après notre premier problème.

Remarque: D'après la théorie de Galois, on ne peut pas résoudre toutes les équations de degré supérieur.

0.3.2 Calcul de certains cosinus.

Problème 1: Calcul de

$$\cos\frac{2\pi}{5},\ \sin\frac{2\pi}{5},\ \cos\frac{4\pi}{5}\ \text{ et }\ \sin\frac{4\pi}{5}.$$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$\text{(E)} \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et en déduire une factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme

$$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

2. On pose $u = z + \frac{1}{z}$ avec $z \neq 0$.
   (a) Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = z^2 f(u)$ où f est un polynôme de degré 2.
   (b) Résoudre $f(u) = 0$ et en déduire les solutions de (E).
3. En comparant les résultats obtenus en 1. et 2., trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\sin\frac{4\pi}{5}$.

Démonstration. 1. Les solutions de (E) sont les racines cinquièmes de l'unité, ainsi

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) \cdot \left(z - e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right) \cdot \left(z - e^{i\frac{4\pi}{5}}\right) \cdot \left(z - e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right) \\ &= \left(z^2 - \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) z + 1\right) \cdot \left(z^2 - \left(e^{-i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}\right) z + 1\right) \\ &= \left(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} z + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5} z + 1\right) \end{aligned}$$

2. Posons $u = z + \frac{1}{z}$,

 (a)

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2\left(z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right) \\ &= z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\right) \end{aligned}$$

 donc $f(u) = u^2 + u - 1$.

 (b) $\Delta = 1 + 4 = 5$ d'où

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} u_1 = z + \frac{1}{z} \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - u_1 z + 1 = 0 \\ &\qquad \Delta = u_1^2 - 4 = \frac{\sqrt{5}-5}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

 et de même,

$$u_2 = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

3. Puisque $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ il nous reste plus qu'à identifier en remarquant que: $\cos\frac{2\pi}{5} \geq 0$, $\sin\frac{2\pi}{5} \geq 0$ et $\operatorname{Re} z_3 \geq 0$, $\operatorname{Im} z_3 \geq 0$ donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

 et $\cos\frac{4\pi}{5} \leq 0$, $\sin\frac{4\pi}{5} \geq 0$ d'où

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

■

Problème 2: Calcul de

$$\cos\frac{2\pi}{7}.$$

D'après notre leçon,

$$\sum_{k=0}^{16} X^k = \prod_{k=1}^{16}(X-\omega_k), \qquad \text{où } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{17}} = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}.$$

Nous allons classer ces racines dans l'ordre suivant:

$$\omega_1,\ \omega_1^3, \omega_1^{3^2},\ \omega_1^{3^2},\ \ldots\ ,\ \omega_1^{3^{15}}.$$

En rappelant que $\omega_k = \omega_1^k$, nous obtenons ainsi toute les racines $17^{\text{ième}}$ de l'unité distinctes de 1, puisque:

$$\begin{array}{llll} 3^0 \equiv 1[17] & 3 \equiv 3[17] & 3^2 \equiv 9[17] & 3^3 \equiv 10[17] \\ 3^4 \equiv 13[17] & 3^5 \equiv 5[17] & 3^6 \equiv 15[17] & 3^7 \equiv 11[17] \\ 3^8 \equiv 16[17] & 3^9 \equiv 14[17] & 3^{10} \equiv 8[17] & 3^{11} \equiv 7[17] \\ 3^{12} \equiv 4[17] & 3^{13} \equiv 12[17] & 3^{14} \equiv 2[17] & 3^{15} \equiv 6[17]. \end{array}$$

Remarque: En fait, pour vérifier que 3 est d'ordre 16 modulo 17, il suffit de vérifier que 3, 3^2, 3^4 et 3^8 ne sont pas congru à 1 modulo 17, mais notre but ici est d'obtenir le classement suivant:

$$\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_9,\ \omega_{10},\ \omega_{13},\ \omega_5,\ \omega_{15},\ \omega_{11},\ \omega_{16},\ \omega_{14},\ \omega_8,\ \omega_7,\ \omega_4,\ \omega_{12},\ \omega_2,\ \omega_6.$$

En prenant une racine sur deux puis en les sommant, on obtient:

$$u_1 = \omega_1 + \omega_9 + \omega_{13} + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_8 + \omega_4 + \omega_2$$

et

$$u_2 = \omega_3 + \omega_{10} + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_6.$$

Par le même procédé, on pose:

$$\begin{array}{ll} v_1 = \omega_1 + \omega_{13} + \omega_{16} + \omega_4, & v_3 = \omega_3 + \omega_5 + \omega_{14} + \omega_{12} \\ v_2 = \omega_9 + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_2, & v_4 = \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_7 + \omega_6. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} t_1 = \omega_1 + \omega_{16}, & t_5 = \omega_3 + \omega_{14}, \\ t_2 = \omega_{13} + \omega_4, & t_6 = \omega_5 + \omega_{12}, \\ t_3 = \omega_9 + \omega_8, & t_7 = \omega_{10} + \omega_7, \\ t_4 = \omega_{15} + \omega_2, & t_8 = \omega_{11} + \omega_6. \end{array}$$

Chaque t_i est de la forme $\omega_k + \omega_{17-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{17}$.

$u_1 + u_2$ étant la somme des 16 racines $17^{\text{ième}}$ de l'unité distinctes de 1, on a: $u_1 + u_2 = -1$. On a,

$$u_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right),$$
$$u_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17} + \cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17}\right),$$

$$v_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17}\right), \quad v_3 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17}\right),$$
$$v_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right), \quad v_4 = 2\left(\cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17}\right).$$

Or $\frac{2k\pi}{17}$ pour $k \in [\![1, 8]\!]$, sont dans $[0, \pi]$ et la fonction cosinus est décroissante sur cet intervalle donc $v_2 < v_1$ et $v_4 < v_3$, de plus $\frac{2\pi}{17} < \frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{17} < \frac{\pi}{3}$ et $\frac{8\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$ donc $u_1 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 - 1\right) = 0$ or $u_1 + u_2 = -1$ donc $-1 - u_2 > 0$ c'est-à-dire $u_2 < -1$ d'où $u_2 < u_1$ et la décroissance de la fonction cosinus nous donne directement que $t_2 < t_1$.

En remarquant que $\omega_k \omega_{k'} = \omega_{k+k'}$ et que pour tout $u \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = \omega_{k+17u}$, on a:

$$\begin{aligned}
u_1 u_2 &= \omega_4 + \omega_{11} + \omega_6 + \omega_{12} + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_{13} + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_2 + \omega_{14} + \omega_3 + \omega_6 + \omega_{16} + \omega_4 \\
&\quad + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_6 + \omega_1 + \omega_7 + \omega_{10} + \omega_3 + \omega_8 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_8 + \omega_3 + \omega_9 + \omega_{12} + \omega_5 \\
&\quad + \omega_{10} + \omega_4 + \omega_2 + \omega_9 + \omega_4 + \omega_{10} + \omega_{13} + \omega_6 + \omega_{11} + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_1 + \omega_{13} + \omega_2 + \omega_5 \\
&\quad + \omega_{15} + \omega_3 + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_{14} + \omega_9 + \omega_{15} + \omega_1 + \omega_{11} + \omega_{16} + \omega_{10} + \omega_5 + \omega_{12} + \omega_7 + \omega_{13} \\
&\quad + \omega_{16} + \omega_9 + \omega_{14} + \omega_8 \\
&= 4(u_1 + u_2) \\
u_1 u_2 &= -4.
\end{aligned}$$

De plus, $u_1 + u_2 = -1$ donc u_1 et u_2 sont racines de

$$X^2 + X - 4 = 0.$$

Toujours par construction, $v_1 + v_2 = u_1$ et

$$\begin{aligned}
v_1 v_2 &= \omega_{10} + \omega_{16} + \omega_9 + \omega_3 + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_4 + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_1 + \omega_{13} + \omega_2 + \omega_{12} + \omega_6 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Ainsi, v_1 et v_2 sont racines de

$$X^2 - u_1 X - 1 = 0.$$

De même, $v_3 + v_4 = u_2$ et

$$\begin{aligned}
v_3 v_4 &= \omega_{13} + \omega_{14} + \omega_{10} + \omega_9 + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_{12} + \omega_{11} + \omega_7 + \omega_8 + \omega_4 + \omega_3 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_2 + \omega_1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Ainsi, v_3 et v_4 sont racines de

$$X^2 - u_2 X - 1 = 0.$$

De plus, $t_1 + t_2 = v_1$ et $t_1 t_2 = \omega_{14} + \omega_5 + \omega_{12} + \omega_3 = v_3$, alors t_1 et t_2 sont racines de

$$X^2 - v_1 X + v_3 = 0.$$

On peut maintenant calculer les solutions de ces différentes équations:

- $X^2 + X - 4 = 0$ à pour discriminant $\Delta = 1 + 16 = 17$ d'où

$$u_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

- $X^2 - u_1 X - 1 = 0$ à pour discriminant $\Delta = u_1^2 + 4$ donc

$$v_1 = \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 4}}{2}.$$

- $X^2 - u_2 X - 1 = 0$ à pour discriminant $\Delta = u_2^2 + 4$ donc

$$v_3 = \frac{u_2 + \sqrt{u_2^2 + 4}}{2}.$$

- $X^2 - v_1 X + v_3 = 0$ à pour discriminant $\Delta = v_1^2 - v_3$ donc

$$t_1 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 - 4v_3}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{17} &= \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\\ &+\frac{\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(\sqrt{17}-1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}.\end{aligned}$$

0.3.3 Géométrie.

Déterminer les conditions complexes pour qu'un triangle soit équilatéral.

Démonstration. Pour commencer, déterminons la rotation R de centre $C(c)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$: Soit $Z'(z')$ l'image par R de $Z(z)$. On a:

$$\overrightarrow{CZ'} = e^{\frac{i\pi}{3}}\overrightarrow{CZ} = -e^{\frac{4i\pi}{3}}\overrightarrow{CZ} = -j^2\overrightarrow{CZ}.$$

Ecrivons cette égalité à l'aide des affixes des points:

$$z' - c = -j^2(z-c) = -j^2 z + j^2 c$$

d'où $z' = -j^2 z + (1+j^2)c$, or $1 + j + j^2 = 0$ donc

$$R(z) = -j^2 z - jc.$$

Le triangle de sommets $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ est équilatéral de sens direct si, et seulement si $R(a) = b$ c'est-à-dire:

$$-j^2 a - jc = b \Leftrightarrow j^2 a + b + jc = 0$$

soit en multipliant par j:

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

Le triangle de sommets $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ est équilatéral de sens indirect si, et seulement si $R(b) = a$ c'est-à-dire:

$$-j^2 b - jc = a \Leftrightarrow a + bj^2 + cj = 0.$$

Donc le triangle de sommets $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ est équilatéral si, et seulement si

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = 0.$$

En développant, on obtient:

$$a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)(j^2 + j) = 0$$

c'est-à-dire

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

que l'on peut encore écrire:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0.$$

■

Exercice: Déterminer z pour que le triangle de sommets i, z et iz soit équilatéral.

Démonstration. D'après la relation précédente, on a:

$$i^2 + z^2 + i^2 z^2 - iz - iz^2 - i^2 z = 0$$

c'est-à-dire

$$iz^2 - (1-i)z + 1 = 0$$

qui est une équation du second degré en z dont le discriminant $\Delta = (1-i)^2 - 4i = -6i$. Cherchons la racine carrée de Δ: Trouvons a et b vérifiant $(a+ib)^2 = -6i$ ce qui est équivalent à $a^2 - b^2 + 2iab = -6i$, d'où $a^2 = b^2$ et $ab = -3$, on peut donc prendre, par exemple, $a = \sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{3}$, d'où $\Delta = 3(1-i)^2$. D'où les deux points recherchés,

$$z_1 = \frac{1 - i - \sqrt{3}(1-i)}{2i} = \frac{(\sqrt{3}-1)(1+i)}{2}$$
$$z_2 = \frac{1 - i + \sqrt{3}(1-i)}{2i} = -\frac{(\sqrt{3}+1)(1+i)}{2}.$$

■