Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...

Pré-requis principaux:

- ◇ Les calculs de vecteur dans le plan (Autrement dit, la connaissance de la structure d'espace affine dans le plan).
- ◇ La notion de produit scalaire et de norme (En particulier, deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul).
- ◇ Notion de somme directe orthogonale (plus précisément, pour tout sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on a: $\dim \overrightarrow{\mathcal{F}} + \dim \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp} = \dim \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$).
- ◇ Lorsque l'on possède une base orthonormée directe $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on a:

$$(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}) = \theta[2\pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| (\cos\theta \overrightarrow{\imath} + \sin\theta \overrightarrow{\jmath}).$$

- ◇ Le théorème de Thalès.
- ◇ Les barycentres.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Notations: Dans cet exposé, on écrira $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ où $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est une droite vectorielle et pour un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ on écrira toujours $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ son unique écriture telle que $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$.

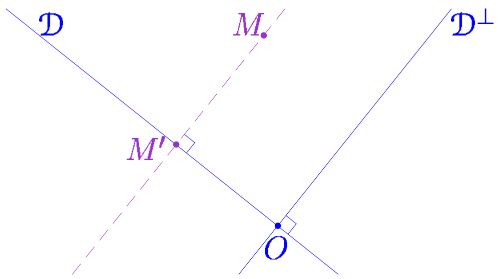
0.1 Définition et propriétés.

Théorème 0.1.1.

Soient O, $\mathcal{D} = O + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}^{\perp} = O + \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ deux droites affines. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, la droite $M + \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ coupe $\mathcal{D}$ en un unique point M' appelé le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. L'application

$$p: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

est appelée projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.



Démonstration. Notons $\mathcal{D}_M^\perp = M+\overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$. Soit $M' \in \mathcal{D}_M^\perp \cap \mathcal{D}$, alors il existe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{D}_M^\perp} \times \overrightarrow{\mathcal{D}}$ tel que $M' = M + \overrightarrow{u} = O + \overrightarrow{v}$, ce qui est équivalent à $M = O + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ soit encore $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Donc M' existe si, et seulement si il existe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{D}_M^\perp} \times \overrightarrow{\mathcal{D}}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ ce qui est le cas car $\overrightarrow{\mathcal{D}_M^\perp} = \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$. De plus, $\mathcal{D} = M' + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}_M^\perp = M' + \overrightarrow{\mathcal{D}_M^\perp}$ donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_M^\perp = M' + \overrightarrow{\mathcal{D}} \cap \overrightarrow{\mathcal{D}_M^\perp}$ d'où l'unicité de M'. ∎

Remarque: Par commodité, on ecrira M', N',... pour parler de l'image de M, N,... par p.

Conséquences:

- La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points invariants par p.
- L'application p est idempotente (c'est-à-dire qu'elle vérifie $p \circ p = p$).
- Si $M \notin \mathcal{D}$, $p^{-1}(\{M\}))$ est l'ensemble vide, sinon c'est la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M. En particulier, p n'est ni injective, ni surjective.

Proposition 0.1.2.
L'application

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{p} : & \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ & \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u_1} \end{array}$$

est linéaire, et c'est l'application vectorielle associée à p.
L'application $\overrightarrow{p}$ est alors appelée projection vectorielle orthogonale sur $\overrightarrow{\mathcal{D}}$.

Démonstration. Soit λ un scalaire, alors

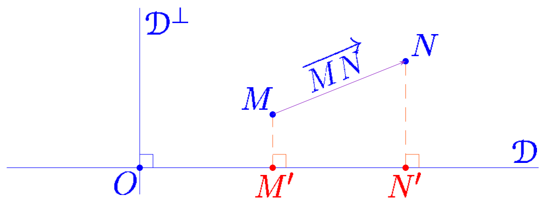
$$\underbrace{\lambda\overrightarrow{u}}_{\in\overrightarrow{\mathcal{P}}} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{u_1}}_{\in\overrightarrow{\mathcal{D}}} + \underbrace{\lambda\overrightarrow{u_2}}_{\overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp},$$

et on a bien $\overrightarrow{p}\,(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{p}\,(\overrightarrow{u})$.

Posons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ avec $\overrightarrow{v_1} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $v_2 \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$. Alors

$$\underbrace{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}_{\in\overrightarrow{\mathcal{P}}} = \underbrace{\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_1}}_{\in\overrightarrow{\mathcal{D}}} + \underbrace{\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_2}}_{\overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp},$$

d'où $\overrightarrow{p}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{p}\,(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{p}\,(\overrightarrow{v})$.



Soient M et N deux points de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On a,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'N'}+\overrightarrow{N'N}\\ &= \underbrace{\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{N'N}}_{\in\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}}+\underbrace{\overrightarrow{M'N'}}_{\in\overrightarrow{\mathcal{D}}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{MN}\right)=\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{p(M)p(N)}$. ∎

Conséquence: L'application p est donc affine (en particulier, elle conserve les barycentres, elle transforme une droite en une droite).

0.2 Applications.

0.3 Calculs de distances.

Lemme 0.3.1.
Théorème de Pythagore
Un triangle ABC est rectangle en A (c'est-à-dire que l'angle en A est droit) si, et seulement si

$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

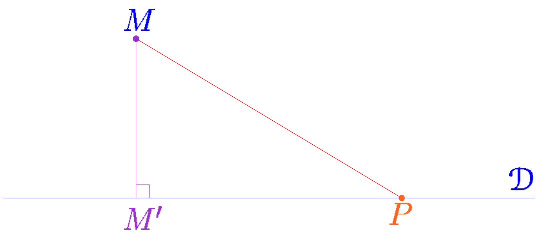
Démonstration. On a:

$$\begin{aligned}BC^2 &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= AB^2+AC^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Donc $BC^2=AB^2+AC^2$ si, et seulement si $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, c'est-à-dire lorsque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, d'où le résultat. ∎

Proposition 0.3.2.
Le projeté orthogonal M' d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ est l'unique point P de $\mathcal{D}$ tel que la distance MP soit minimale; c'est la distance de M à la droite $\mathcal{D}$ notée $\mathrm{d}(M,\mathcal{D})$.

Démonstration. Commençons par faire un dessin:



Pour tout point P de la droite $\mathcal{D}$, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle $PM'M$ restangle en M', on a $MP^2=MM'^2+M'P^2$ et la distance $M'P^2$ est strictement positive si, et seulement si P est distinct de M'. ∎

Proposition 0.3.3.
Soient $M \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$. Alors,

$$\overline{M'M} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

En particulier,

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Démonstration. Le vecteur $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ est unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{M'M}$, donc

$$\overrightarrow{M'M} = \overline{M'M} \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

et

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M'M} = \overline{M'M} \cdot \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|},$$

or

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M'M} &= \left(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}\right) \cdot \overrightarrow{M'M} \\
&= \overrightarrow{M'M} \cdot \overrightarrow{M'M} \\
&= \overline{M'M}^2 \cdot \frac{\|\overrightarrow{u}\|^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \\
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M'M} &= \overline{M'M}^2
\end{aligned}$$

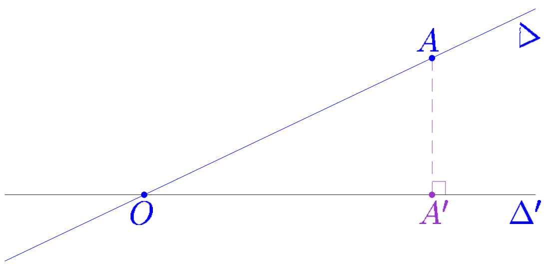
∎

0.4 Calculs d'angles.

Définition 0.4.1.
Soient Δ et Δ' deux droites de $\mathcal{P}$ sécantes en O et A un point de Δ tel que $\|\overrightarrow{OA}\| = 1$. Alors

$$k := \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

est appelée le rapport de projection orthogonale de Δ sur Δ'.



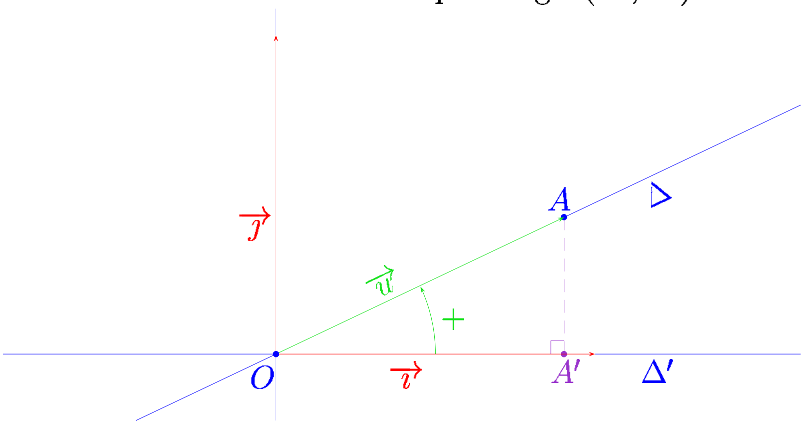
Remarque: D'après le théorème de Thalès, pour tout B sur Δ, on a:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

ainsi

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k.$$

Posons $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\imath}$ un vecteur unitaire directeur de Δ' de même sens que $\overrightarrow{OA'}$. Pour la proposition suivante on va orienter $\mathcal{P}$ de sorte que l'angle $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u})$ soit direct.



Proposition 0.4.2.
Le rapport de la projection orthogonale d'un axe Δ sur un axe Δ' sécant ne dépend que de l'angle géométrique de ces axes et est égal au cosinus de leur angle.

Démonstration. Soit $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ le repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$. Si on pose $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u})\ [2\pi]$, on a d'après le pré-requis, $\overrightarrow{u} = \cos\theta\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\overrightarrow{\jmath}$, or $\overrightarrow{u} = \overline{OA'}\overrightarrow{\imath} + \overline{A'A}\overrightarrow{\jmath}$ d'où $\overline{OA'} = \cos\theta\overrightarrow{\imath}$ et $\overline{A'A} = \sin\theta\overrightarrow{\jmath}$ donc $\overline{OA'} = k$, or $\overline{OA} = 1$ donc $k = \cos\theta$. Par parité du cosinus, k ne dépend que de l'angle géométrique des axes. ∎

Dans la configuration proposée, on obtient avec M un point de Δ, le formulaire suivant:

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \cos\theta, \quad \frac{\overline{MM'}}{\overline{OM}} = \sin\theta,$$

mais aussi,

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{OM'}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} := \tan\theta, \quad \frac{\overline{OM'}}{\overline{MM'}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} := \text{cotan}\theta.$$

0.5 Optimisation.

Exercice: Soient ABC un triangle non plat et α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma>0$ et une droite $\mathcal{D}$. Chercher le point M sur $\mathcal{D}$ tel que la somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ soit minimale.

Démonstration. Soit G le barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$ et $C(\gamma)$, alors

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2,$$

or c'est une somme de termes positifs dont seul M est inconnu, il suffit donc de minimiser MG^2, c'est-à-dire de prendre pour M le projeté orthogonal de G sur $\mathcal{D}$. ∎