Produit vectoriel dans l'espace euclidien de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.

Cadre: On se place dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

Pré-requis:

- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- ◇ La notion de déterminant d'un système de trois vecteurs (En particulier, les déterminants de trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ exprimés dans deux bases orthonormées directes de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont égaux et que le déterminant est une forme trilinéaire alternée).
- ◇ La notion de produit scalaire (En particulier, la définition d'orthogonalité qui en découle).
- ◇ La définition du sinus d'un angle orienté à l'aide du déterminant, du cosinus à l'aide du produit scalaire et les relations métriques dans le triangle rectangle.

0.1 Le produit vectoriel de l'espace.

Définition 0.1.1.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Le déterminant $|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}|$ est appelé le produit mixte de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et sera noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Remarque: Ce produit est bien défini car le produit mixte ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

Conséquence: Le produit mixte est une forme trilinéaire alternée. En particulier, pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^3$, on a:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}].$$

Théorème 0.1.2.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^2$. Il existe un unique vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que, pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$, on a:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{w}.$$

Ce vecteur est appelé le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et est noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Démonstration. Notons (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) et (x_w, y_w, z_w) les coordonnées respectives de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \\
&= x_w \cdot \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - y_w \cdot \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + z_w \cdot \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
& \qquad \text{(En développant suivant la dernière colonne)} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \\
[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{w}.
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{V}$ est unique par unicité du développement du déterminant suivant la dernière colonne. ■

Conséquence: On a immédiatement l'écriture analytique du produit vectoriel:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Remarques:

◇ Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

◇ On a $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

Proposition 0.1.3.
Le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bilinéaire et antisymétrique en $\overrightarrow{u}$ et en $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire que l'on a pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$ et pour tout scalaire λ:

$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}\right) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v} \qquad \overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}\right) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v'}$$

et

$$(\lambda \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \qquad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Démonstration. Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$, on a par linéarité du produit mixte:

$$\left[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + \left[\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right],$$

d'où

$$\left(\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}\right) \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} + \left(\overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{w} = \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{w},$$

d'où $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u'}\right)\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u'}\wedge\overrightarrow{v}$ et on a de même $(\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v})=\lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$.

Puisque le produit mixte est une forme alternée, on a pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$,

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}],$$

on en déduit, comme précédemment l'antisymétrie du produit vectoriel. ■

Conséquence: On a $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}$.

Propriété 0.1.4.
$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in\overrightarrow{\mathcal{E}}^3$, on a

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}].$$

Démonstration. Ceci découle de la stabilité du produit mixte par permutation circulaire. ■

Remarque: Cette expression justifie la terminologie de produit mixte.

Théorème 0.1.5.

L'identité de Jacobi.
Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in\overrightarrow{\mathcal{E}}^3$, on a:

$$\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})+\overrightarrow{v}\wedge(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})+\overrightarrow{w}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=0.$$

Démonstration. Commençons par démontrer un lemme:

Lemme 0.1.6.
formule du double produit vectoriel
Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in\overrightarrow{\mathcal{E}}^3$, on a:

$$\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}.$$

Démonstration. Soit $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}$ telle que $\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ engendrent un plan vectoriel contenant $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, de sorte que $\overrightarrow{w}=b\overrightarrow{i}+c\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}=d\overrightarrow{i}+e\overrightarrow{j}+f\overrightarrow{k}$. On a:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}\wedge(ac\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j})\\ &= \left(d\overrightarrow{i}+e\overrightarrow{j}+f\overrightarrow{k}\right)\wedge\left(ac\overrightarrow{k}\right)\\ &= dac\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k}+eac\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k}\\ &= -dac\overrightarrow{j}+eac\overrightarrow{i},\end{aligned}$$

or on a:

$$(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}=(bd+ce)a\overrightarrow{i}-(ad)\,(b\overrightarrow{i}+c\overrightarrow{j})=cea\overrightarrow{i}-adc\overrightarrow{j},$$

d'où le résultat anoncé. ■

Pour l'identité de Jacobi, on applique trois fois la formule du double produit vectoriel et on simplifie. ■

Remarque: La formule du double produit vectoriel permet de vérifier que le produit vectoriel n'est pas associatif car, sauf cas particulier, $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$ est différent de $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}$.

La définition du produit vectoriel nous permet d'obtenir la caractérisation géométrique suivante:

Théorème 0.1.7.

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$,

- Si A, B, C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.
- Sinon, on note $\mathcal{P}_{ABC}$ le plan passant par A, B, C et on le muni d'un repère orthonormal direct $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, alors

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{k},$$

  où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\mathcal{P}_{ABC}$ et où $\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ désigne le sinus de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ orienté par $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

Démonstration. Soit $e=\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ la base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ proposée dans le théorème. Alors

$$\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath},\quad \overrightarrow{v}=x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{w}=\alpha\overrightarrow{\imath}+\beta\overrightarrow{\jmath}+\gamma\overrightarrow{k}.$$

On peut écrire,

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\det\nolimits_e(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=\begin{vmatrix} x & x' & \alpha\\ y & y' & \beta\\ 0 & 0 & \gamma\end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\det\nolimits_{(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\,\gamma.$$

Or $\gamma=\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{w}$ et l'égalité est vraie pour tout réel α, β et γ, ainsi

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\det\nolimits_{(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{k}=\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{k}.$$

■

0.2 Applications.

0.2.1 Calculs de distances.

Théorème 0.2.1.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. La distance d'un point M à $\mathcal{D}$ est:

$$\mathrm{d}(M,\mathcal{D})=\frac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Démonstration. On a $\mathrm{d}(M,\mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, puis

$$\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right) \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = MH \cdot \|\overrightarrow{u}\|.$$

■

Exercice: Soient A et B deux points de E et r un réel strictement poitif. Quel est l'ensemble des points M de E vérifiant

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = r?$$

Démonstration. Regardons la distance de M à (AB):

$$\mathrm{d}(M,(AB)) = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|},$$

donc l'ensemble recherché est un cylindre de révolution d'axe de révolution (AB) et de rayon $\frac{r}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$. ■

Théorème 0.2.2.

Soit $\mathcal{P} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ un plan de $\mathcal{E}$ passant par A. La distance d'un point M à $\mathcal{P}$ est

$$\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}.$$

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, alors $\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = MH$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{P}$. Donc

$$\left|\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right| = \left|\overrightarrow{MH} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right| = MH \cdot \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|,$$

d'où le résultat. ■

Remarque: Si $\mathcal{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$ et si M et A ont pour coordonnées respectives (x_M, y_M, z_M) et (x_A, y_A, z_A), alors les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) &= \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} \\
&= \frac{|\lambda a(x_M - x_A) + \lambda b(y_M - y_A) + \lambda c(z_M - z_A)|}{|\lambda|\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\
&= \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.
\end{aligned}$$

0.2.2 Aires.

Théorème 0.2.3.
Soit ABC un triangle de $\mathcal{E}$, l'aire de ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Démonstration. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors,

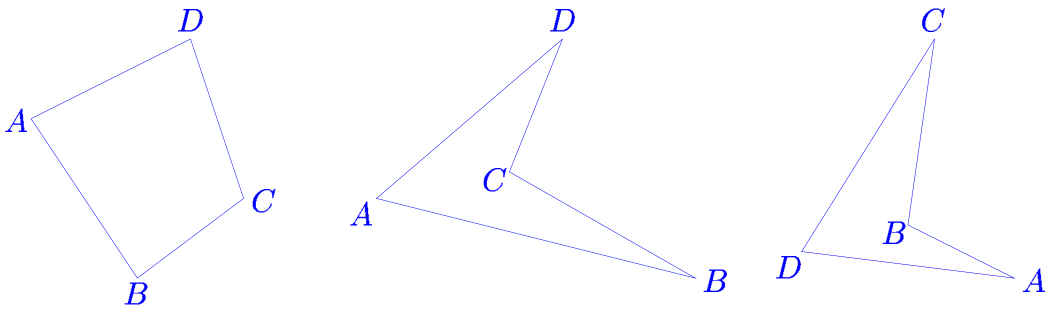
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}BC \cdot AB\left|\sin\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)\right| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

■

Corollaire 0.2.4.
Soit $ABCD$ un quadrilatère plat non croisé de $\mathcal{E}$. L'aire de $ABCD$ est

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|.$$

figure 1 figure 2 figure 3



Démonstration. Supposons $ABCD$ direct. On a

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|.$$

Si $ABCD$ est convexe (figure 1), les bases $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$ sont directes et les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{ABCD}.$$

Si $ABCD$ est non convexe, plaçons nous dans le cas de figure 2 (la figure 3 se traite de la même façon). Les bases $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$ sont de sens contraires. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de sens contraires et on obtient:

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left|\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| - \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|\right| = \left|\mathcal{A}_{ABD} - \mathcal{A}_{BCD}\right| = \mathcal{A}_{ABCD}.$$

■

0.2.3 Résolution d'un système de deux équations à trois inconnues.

Le produit vectoriel permet d'étudier géométriquement un système linéaire homogène, à coefficients réels, à deux équations non proportionnelles (système de rang 2) du type suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0 \end{array} \right. .$$

Sa solution générale est donnée par les formules suivantes, pour λ un réel:

$$x = \lambda \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad y = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad z = \lambda \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

En effet, une interprétation géométrique de ce système consiste à introduire les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ et un vecteur inconnu $\overrightarrow{w}$ de composante (x, y, z). Le système équivaut alors à $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{w}$. Si les deux équations étaient proportionnelles (système de rang 1) le système serait équivalent à la première équation et l'ensemble des solutions serait le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Lorsque les équations sont indépendantes, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres et, géométriquement, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle orthogonale au plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, engendrée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, d'où le résultat proposé.

0.2.4 Equation d'un plan dans l'espace.

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par ces trois points.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, par conséquent $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que (AM) soit orthogonale à ce vecteur. Donc une équation de $\mathcal{P}$ s'obtient en développant le produit scalaire

$$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM} = 0,$$

ce qui est équivalent à développer le produit mixte

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right].$$