Fonction polynôme du second degré à coefficients réels. Mise sous forme canonique; application à l'étude du sens de variation et à la représentation graphique de la fonction. Equations et inéquations du second degré. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Cadre: On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Pré-requis:
⋄ La représentation graphique d'une fonction dans un repère.
La précision du sujet nous incite à faire une leçon niveau seconde, c'est-à-dire sans l'utilisation de la dérivée. Cette leçon a donc un but pédagogique.

0.1 La fonction $\varphi : x \mapsto x^2$.

Notation: Nous noterons M_x le point de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ représentative de φ d'abscisse x.

Afin d'avoir une bonne idée de $\mathcal{C}_\varphi$, voici la:

✎ **Proposition 0.1.1.**

(i) La fonction φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.
(ii) Pour tout réel x, les points M_x et M_{-x} sont symétriques par rapport à (Oy). Par conséquent, $\mathcal{C}_\varphi$ admet (Oy) pour axe de symétrie.
(iii)
$$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = +\infty.$$
(iv)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = -\infty,$$
on dit alors que φ possède une direction asymptotique (Oy).
(v) La courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est convexe, c'est-à-dire qu'elle est en dessous de ses cordes.

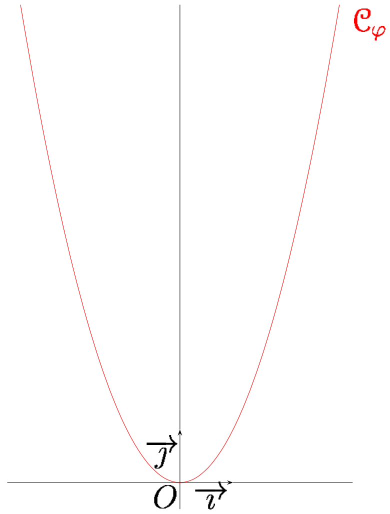
Démonstration. (i) Pour tout x tel que $0 \leq x < y$, on a $0 \leq x^2 < xy < y^2$, donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Ensuite, en composant φ avec $x \mapsto -x$, on a que φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

(ii) En effet, $\varphi(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(iii) Pour tout réel $x > 1$, on a $x^2 > x$ donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. La deuxième limite découle du fait que (Oy) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_\varphi$.
(iv) En effet, $\frac{\varphi(x)}{x} = x$.
(v) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
La droite (M_aM_b) à pour équation $y = \psi(x) = (b+a)x - ba$. Or, pour tout x dans $]a, b[$, on a

$$\varphi(x) - \psi(x) = x^2 - (b+a)x + ba = (x-a)(x-b) \leq 0.$$

■

Remarque: Dans ψ, faisons $a = b$ ainsi $\psi(x) = 2ax - a^2$. Soit alors Δ_a la droite d'équation $y = 2ax - a^2$; $\varphi(x) - \psi(x) = (x-a)^2 \geq 0$ donc Δ_a est en dessous de $\mathcal{C}_\varphi$ et ne rencontre $\mathcal{C}_\varphi$ qu'au point M_a. Si nous disposions de la dérivée, nous pourrions voir que cette droite est la tangente à la courbe en M_a.



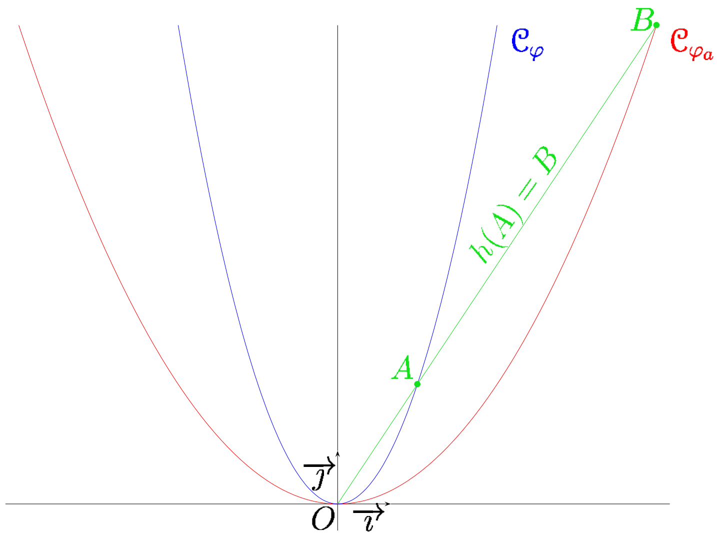
0.2 Les fonctions $\varphi_a : x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$.

Théorème 0.2.1.

La courbe $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ de déduit de $\mathcal{C}_\varphi$ par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{a}$.

Démonstration. Soit $M_x(x, x^2)$ un point de $\mathcal{C}_\varphi$, alors $h(M_x) = \left(\frac{x}{a}, \frac{x^2}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}, a\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$ qui est bien un point de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$. Inversement l'image du point (x, ax^2) de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ par h^{-1} (l'homothétie de centre O et de rapport a) est le point $(ax, (ax)^2)$ qui appartient à $\mathcal{C}_\varphi$. ■

Conséquences:
- Si $a > 0$, alors la fonction φ_a est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$; si $a < 0$, alors la fonction φ_a est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.
- L'axe (Oy) est encore axe de symétrie de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ car h fixe (Oy).
- Si $a > 0$, $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ est convexe et si $a < 0$, $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ est concave.



0.3 Les fonctions $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Constatons tout d'abord que:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \qquad \text{(on reconnait le début d'un carré)} \\ &= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

Remarque: Cette forme est souvent appelée la forme canonique de f.

✎ **Proposition 0.3.1.**

- Lorsque $a > 0$, g est strictement croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$.
- Lorsque $a < 0$, g est strictement décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ et croissante sur $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$.

Démonstration. On déduit de la forme canonique l'écriture $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ où $f_1 : t \mapsto t + \frac{b}{2a}$, $f_2 : t \mapsto at^2$ et $f_3 : t \mapsto t + \frac{4ac-b^2}{4a}$. Les fonctions f_1 et f_3 sont croissantes et on vient d'étudier les variations de f_2. ∎

✎ **Théorème 0.3.2.**
La courbe $\mathcal{C}_f$ se déduit de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ par la translation τ de vecteur $\vec{V}\left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Démonstration. Soit $P(x, f(x))$ un point de $\mathcal{C}_f$. Alors,

$$\tau(P) = \left(x + \frac{b}{2a}, f(x) - \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = \left(x + \frac{b}{2a}, a\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right),$$

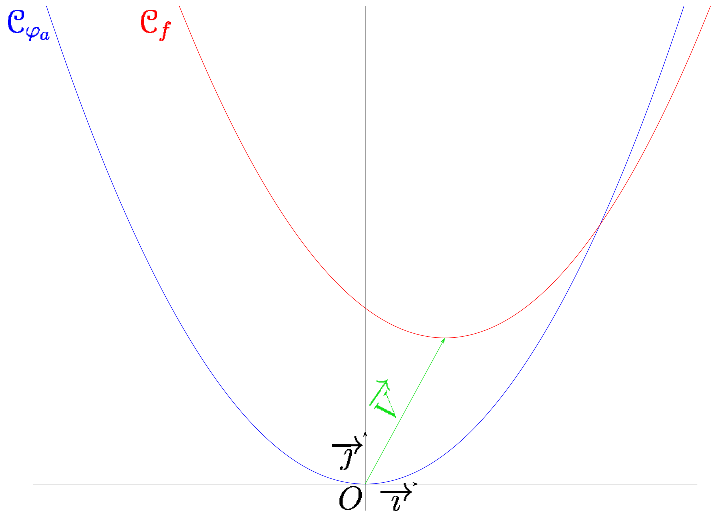
qui est bien un point de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$. Inversement, soit $Q(x, ax^2)$ un point de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$, alors

$$\tau^{-1}(Q) = \left(x - \frac{b}{2a}, ax^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right),$$

qui est un point de $\mathcal{C}_f$. ∎

Conséquences:

- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \frac{b}{2a}$ pour axe de symétrie.
- Si $a > 0$, $\mathcal{C}_f$ est convexe et si $a < 0$, $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ est concave.



0.4 Equations du second degré.

Théorème 0.4.1.

Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$.

- ◇ Si $\Delta := b^2 - 4ac > 0$, alors (E) possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- ◇ Si $\Delta := b^2 - 4ac = 0$, alors (E) possède une solution doube

$$x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

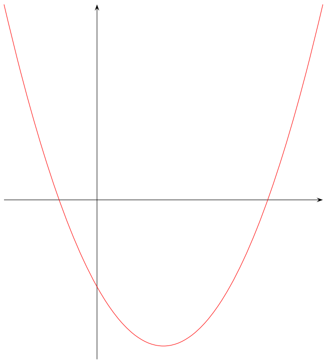
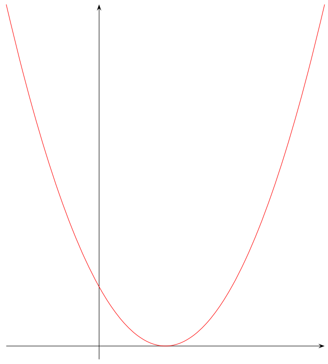
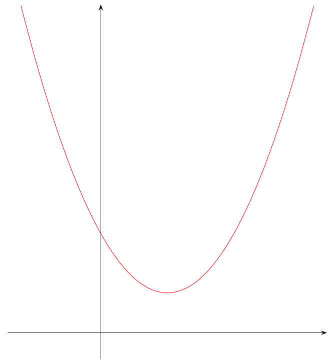
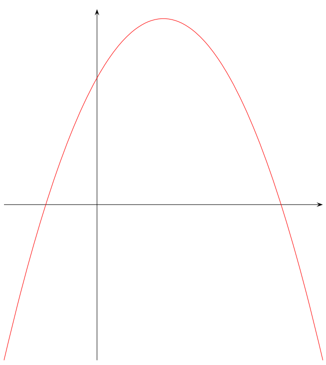
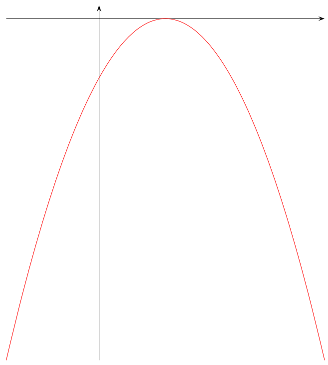
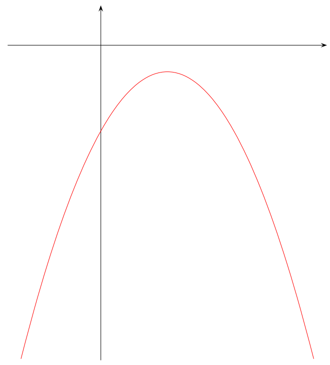
- ◇ Si $\Delta := b^2 - 4ac < 0$, alors (E) n'a pas de solutions.

Démonstration. Il suffit de reprendre la forme canonique mise en évidence précèdemment:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

∎

Géométriquement, résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ c'est chercher les points d'intersection de l'axe (Ox) avec la courbe $\mathcal{C}_f$; nous obtenons alors les différents cas suivant:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Remarques:

- La somme des racines est $-\frac{b}{a}$ et leur produit est $\frac{c}{a}$.
- Si (E) possède deux racines distinctes, la fonction f est du signe de $-a$ entre ces racines et du signe de a à l'extérieur de ses racines.

0.5 Applications.

0.5.1 Une propriété des sécantes.

Soit Γ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.
Cherchons les points d'intersection de Γ avec la droite $y = mx + \lambda$, avec m, λ des réels:

$$x^2 = mx + \lambda \Leftrightarrow x^2 - mx - \lambda = 0.$$

C'est une équation du second degré dont $\Delta = m^2 + 4\lambda$. On obtient alors deux points d'intersections lorsque $\Delta > 0$: Le point $M\left(\frac{m-\sqrt{\Delta}}{2}, m \cdot \frac{m-\sqrt{\Delta}}{2} + \lambda\right)$ et le point $N\left(\frac{m+\sqrt{\Delta}}{2}, m \cdot \frac{m+\sqrt{\Delta}}{2} + \lambda\right)$. On obtient un unique point d'intersection lorsque $\Delta = 0$: $M\left(\frac{m}{2}, m \cdot \frac{m}{2} + \lambda\right)$ et aucun points d'intersection lorsque $\Delta < 0$.

Lorsque l'on a deux points d'intersection M et N, le milieu I de $[MN]$ à pour coordonnées:

$$I\left(\frac{m}{2},\frac{m^2}{2}+\lambda\right),$$

on remarque alors que l'abscisse de I ne dépend pas de λ, on en déduit que le lieu des milieux des cordes de Γ de pente m est la demi-droite d'équation $x=\frac{m}{2}$. L'origine I_O de la demi-droite correspond au cas où $\Delta=0$ c'est-à-dire $\lambda=-\frac{m^2}{4}$ d'où $I_O\left(\frac{m}{2},\frac{m^2}{4}\right)$.

0.5.2 Un programme possible.

Les formules algèbriques concernant les racines de $x\mapsto ax^2+bx+c$ nous permettent de construire le programme suivant:

input a, b, c
if $b^2-4a*c>0$
then text "Les deux racines sont:"
disp $(-b-\sqrt{}(b^2-4*c))/(2a),(-b+\sqrt{}(b^2-4*c))/(2a)$
elseif $b^2-4a*c=0$
then text "La racine double est:"
disp $-b/(2a)$
else text "Il n'y a pas de racine."
endif