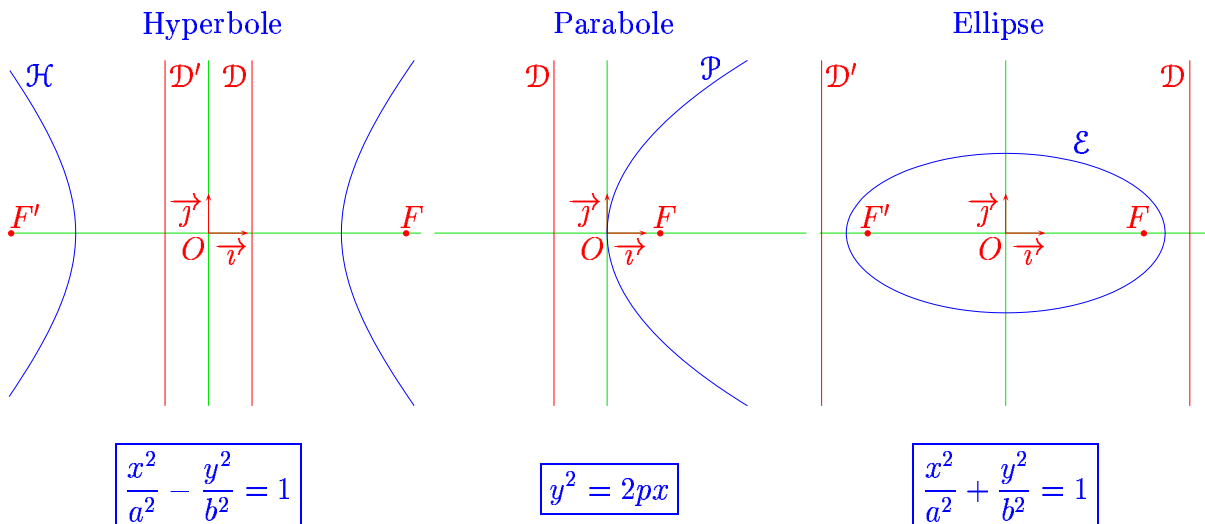


Exemples de représentation paramétrique des coniques; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.

Pré-requis:

- ◇ Définitions géométrique (monofocal et bifocal) et par équation réduite des coniques réelles.
- ◇ Définition de bissectrices d'un angle.
- ◇ Notion d'orthogonalité.
- ◇ Définitions et propriétés des fonctions trigonométriques.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté \mathcal{P} muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Voici les différents repères que nous allons utiliser pour travailler au cours de cette leçon:



Notations: Le point H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , $\Gamma = \{\mathcal{H}, \mathcal{P}, \mathcal{E}\}$.

0.1 Représentation paramétrique.

Définition 0.1.1.

Soit la courbe plane

$$\mathcal{C} = \{(f(t), g(t)) \in \mathcal{P} \mid t \in I, f, g \in \mathcal{C}(I)\}.$$

Les équations

$$x = f(t) \quad \text{et} \quad y = g(t), \quad \text{pour } t \in I,$$

sont des équations paramétriques de \mathcal{C} de paramètre t .

Remarque: La courbe \mathcal{C} de cette définition est qualifiée de courbe paramétrée et les équations paramétriques constitue une paramétrisation de \mathcal{C} ou une représentation paramétrique de \mathcal{C} .

Théorème 0.1.2.

En utilisant les repères spécifiés dans l'introduction et en choisissant un paramètre adapté, on obtient les paramétrisations suivantes:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Démonstration. • D'après les propriétés des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, à tout couple de réels (u, v) vérifiant $u^2 - v^2 = 1$, on peut faire correspondre un réel t tel que:

$$\begin{cases} u = \pm \operatorname{ch} t \\ v = \operatorname{sh} t \end{cases}.$$

De sorte que

$$\forall M(x, y), \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \begin{cases} \frac{x}{a} = \pm \operatorname{ch} t \\ \frac{y}{b} = \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

•

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{y^2}{2p} \vec{i} + y \vec{j}$$

d'où le résultat en prenant $y = t$.

• D'après les propriétés des fonctions cosinus et sinus, à tout couple de réels (u, v) vérifiant $u^2 + v^2 = 1$, on peut faire correspondre un réel t défini à $2k\pi$ près tel que:

$$\begin{cases} u = \cos t \\ v = \sin t \end{cases}.$$

De sorte que

$$\forall M(x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi[, \text{ tel que } \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

■

Exercice: Montrer que l'on peut écrire paramétrer l'hyperbole avec:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

Démonstration. L'application $t \mapsto \tan t$ définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} . De plus, $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1,$$

et $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est une fonction paire sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $[1, +\infty[$. De plus, on a que $t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\mapsto \frac{1}{\cos t}$, définit une bijection de $[\pi, \frac{3\pi}{2}[$ sur $[-1, -\infty[$ et en changeant de repère ($X = x - \pi$ et $Y = y$) on a la parité dans le nouveau repère. Ainsi

$$\forall M(x, y) \in \mathcal{H}, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \exists t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{1}{\cos t} \\ \frac{y}{b} = \tan t \end{cases} .$$

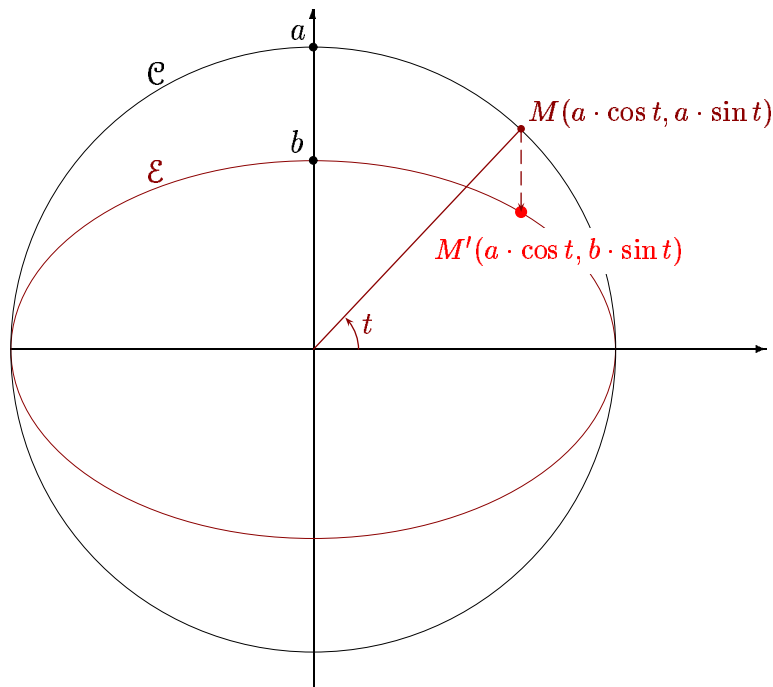
Réciproquement, tout point $M(t)$ de coordonnées $(\frac{a}{\cos t}, b \tan t)$ où $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ appartient bien à \mathcal{H} . ■

Remarque: En considérant le paramétrage du cercle suivant:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[,$$

(le paramètre t est l'angle polaire) l'affinité orthogonale d'axe $(O\vec{v})$ et de rapport $\frac{b}{a}$ le cercle sera transformé en la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[:$$



En partant du cercle de centre O et de rayon b et en le transformant par l'affinité orthogonale d'axe $(O\vec{j})$ et de rapport $\frac{a}{b}$ redonne \mathcal{E} .

0.2 Constructions de tangentes et de normales.

Définition 0.2.1.

Soit la courbe paramétrée $\Gamma := \{M(t) \in \mathcal{P} | t \in I\}$ et $M_0 = M(t_0)$ un point fixé de Γ . Lorsqu'elle existe, la tangente à Γ en M_0 est la droite \mathcal{T}_{M_0} passant par M_0 et dirigée par le vecteur dérivé du vecteur position, c'est-à-dire:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}_0}{t - t_0}.$$

La normale à Γ en M_0 , notée \mathcal{N}_{M_0} est la droite orthogonale à \mathcal{T}_{M_0} passant par M_0 .

Théorème 0.2.2.

Toutes les coniques Γ admettent une tangente en chacun de leurs points.

Démonstration. Dans chacune des paramétrisations proposées précédemment, la tangente en un point $M(t)$ de Γ existe car le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ n'est jamais nul. ■

Propriété 0.2.3.

Soit Γ une courbe paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$ et $M_0 := (x_0, y_0)$ un point fixé de Γ . La tangente \mathcal{T}_{M_0} a pour équation:

$$y'(t_0)(x - x_0) - x'(t_0)(y - y_0) = 0,$$

et la normale \mathcal{N}_{M_0} a pour équation:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0.$$

Démonstration. D'après la définition, \mathcal{T}_{M_0} est dirigée par

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}_0}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}(t)}{t - t_0} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Or l'équation cartésienne d'une droite s'écrit $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq (0, 0)$) avec $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ un vecteur normal, ainsi \mathcal{T}_{M_0} a une équation de la forme

$$-y'(t_0)x + x'(t_0)y + c = 0.$$

Or elle passe par $M_0(x_0, y_0)$, d'où le résultat.

De même, on a une équation du type $x'(t_0)x + y'(t_0)y + c = 0$ et comme elle passe par M_0 , on obtient le résultat. ■

Voyons maintenant une construction de tangente commune à toutes les coniques:

Proposition 0.2.4.

Soit $M \in \Gamma$ ($M \notin (FF')$), alors \mathcal{T}_M coupe \mathcal{D} en T et (FM) est perpendiculaire à (FT) .

Démonstration. On va se placer dans un nouveau repère (O', \vec{i}', \vec{j}') où $(O'\vec{i}')$ est l'axe focal et $(O'\vec{j}')$ la directrice \mathcal{D} .

Dans ce nouveau repère, on note $M(x(t), y(t))$, $F(c, 0)$, $T(0, \tau)$ et $H(0, y)$. Alors l'équation de la tangente \mathcal{T}_M est:

$$y = \frac{y'}{x'} \cdot x + \tau,$$

$(x' \neq 0$ car $M \notin (FF')$) ainsi

$$\tau = y - \frac{y'}{x'} \cdot x.$$

On déduit de la définition monofocale d'une conique réelle:

$$MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = e^2 x^2.$$

En dérivant cette relation par rapport à t , on obtient:

$$(x - c)x' + yy' = e^2 xx' \Rightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{e^2 x - x + c}{y},$$

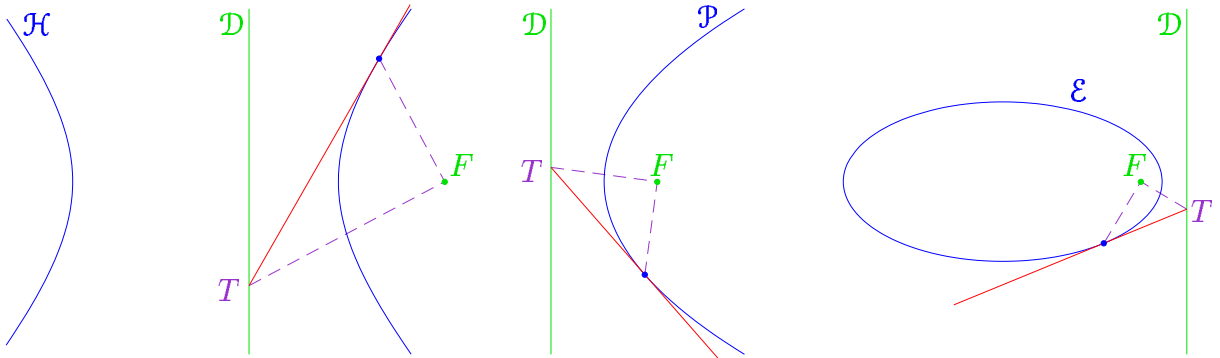
d'où $\tau = y - \frac{e^2 x - x + c}{y} \cdot x$.

Calculons,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} &= (x - c)(-c) + (-y)(-\tau) \\ &= -cx + c^2 + y^2 - (e^2 x^2 - x^2 + cx) \\ &= -cx + c^2 + e^2 x^2 - (x - c)^2 - e^2 x^2 + x^2 - cx \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

On en déduit la construction de tangente et de normale suivante:



Voyons maintenant des constructions spécifiques à chacune des coniques:

Proposition 0.2.5.

La tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{H} est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Démonstration. La définition bifocale fournit l'équivalence suivante:

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow MF - MF' = \pm 2a.$$

Notons $\vec{u}(t) = \overrightarrow{M(t)F}$ et $\vec{v}(t) = \overrightarrow{M(t)F'}$, l'application

$$h : t \mapsto \|\vec{u}(t)\| - \|\vec{v}(t)\|$$

est constante sur $[0, 2\pi]$ donc sa dérivée est nulle. De plus la paramétrisation proposée précédemment montre que chacune des applications $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|$ et $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$ sont dérivable sur $[0, 2\pi]$:

$$\|\vec{u}(t)\| = \sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t)\| = \frac{\vec{u}'(t) \cdot \vec{u}(t)}{\|\vec{u}(t)\|}.$$

Or

$$\vec{u}(t) = \overrightarrow{M(t)F} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OM(t)} \Rightarrow \vec{u}'(t) = -\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt},$$

et

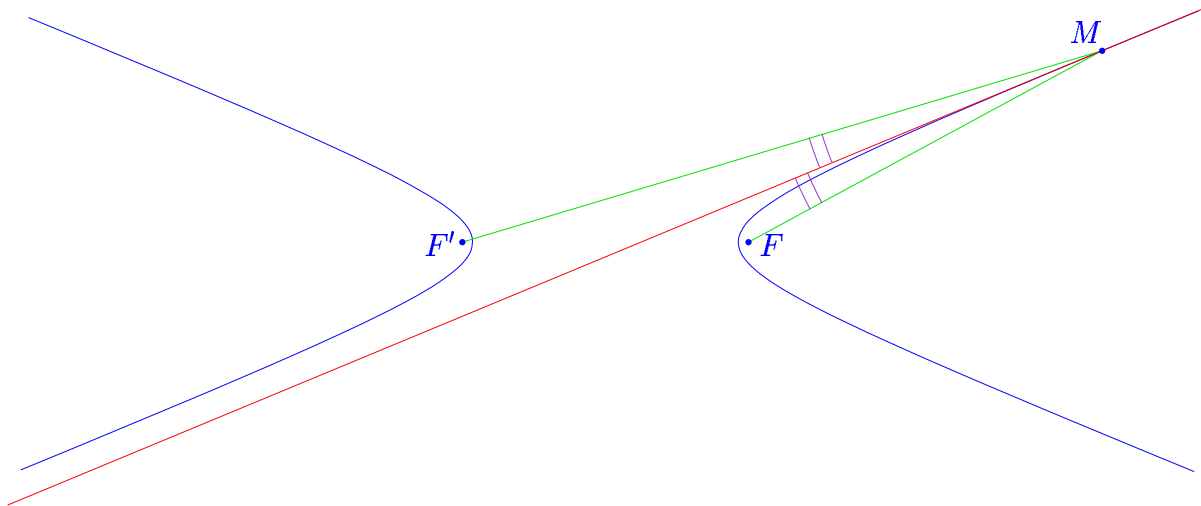
$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{M(t)F'} = \overrightarrow{OF'} - \overrightarrow{OM(t)} \Rightarrow \vec{v}'(t) = -\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}.$$

Par conséquent,

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} - \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|} \right) = 0.$$

Or $\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} - \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|}$ est un vecteur directeur de la bissectrice extérieure à l'angle $\widehat{FMF'}$, on en déduit que la tangente est dirigée par un vecteur orthogonal à cette bissectrice extérieure, c'est donc la bissectrice intérieure de $\widehat{FMF'}$. ■

On obtient alors la construction de tangente et de normale à une hyperbole:



Proposition 0.2.6.

La tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{P} est la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{FMH} .

Démonstration. D'après la définition monofocale de la parabole ($MH = MF$), le triangle HMF est isocèle en M , ainsi la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{FMH} a pour vecteur directeur:

$$\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH} \left(-\frac{t^2}{p}, -t \right).$$

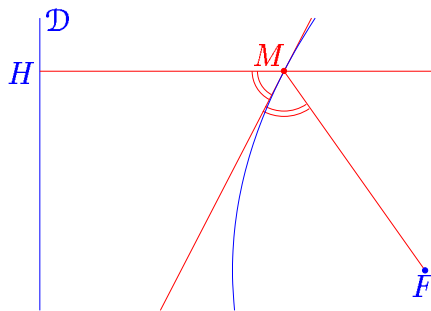
Comme

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \left(\frac{t}{p}, 1 \right),$$

ainsi

$$\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH} = -t \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t),$$

d'où le résultat. ■



Proposition 0.2.7.

La tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{E} est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Démonstration. La définition bifocale fournit l'équivalence suivante:

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF + MF' = 2a,$$

on refait exactement la même démonstration que pour l'hyperbole:

Notons $\vec{u}(t) = \overrightarrow{M(t)F}$ et $\vec{v}(t) = \overrightarrow{M(t)F'}$, l'application

$$h : t \mapsto \|\vec{u}(t)\| + \|\vec{v}(t)\|$$

est constante sur $[0, 2\pi]$ donc sa dérivée est nulle. De plus la paramétrisation proposée précédemment montre que chacune des applications $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|$ et $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$ sont dérivable sur $[0, 2\pi]$:

$$\|\vec{u}(t)\| = \sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t)\| = \frac{\vec{u}'(t) \cdot \vec{u}(t)}{\|\vec{u}(t)\|}.$$

Or

$$\vec{u}(t) = \overrightarrow{M(t)F} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OM(t)} \Rightarrow \vec{u}'(t) = -\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt},$$

et

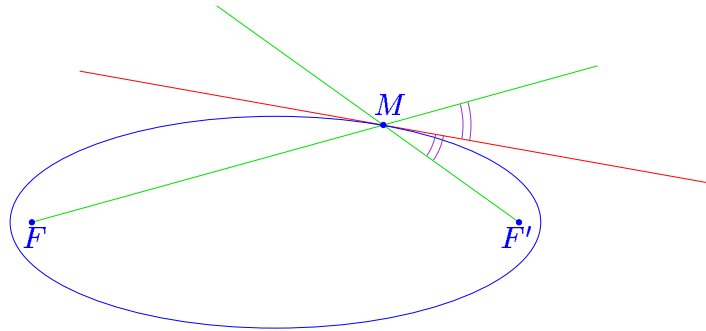
$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{M(t)F'} = \overrightarrow{OF'} - \overrightarrow{OM(t)} \Rightarrow \vec{v}'(t) = -\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}.$$

Par conséquent,

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|} \right) = 0.$$

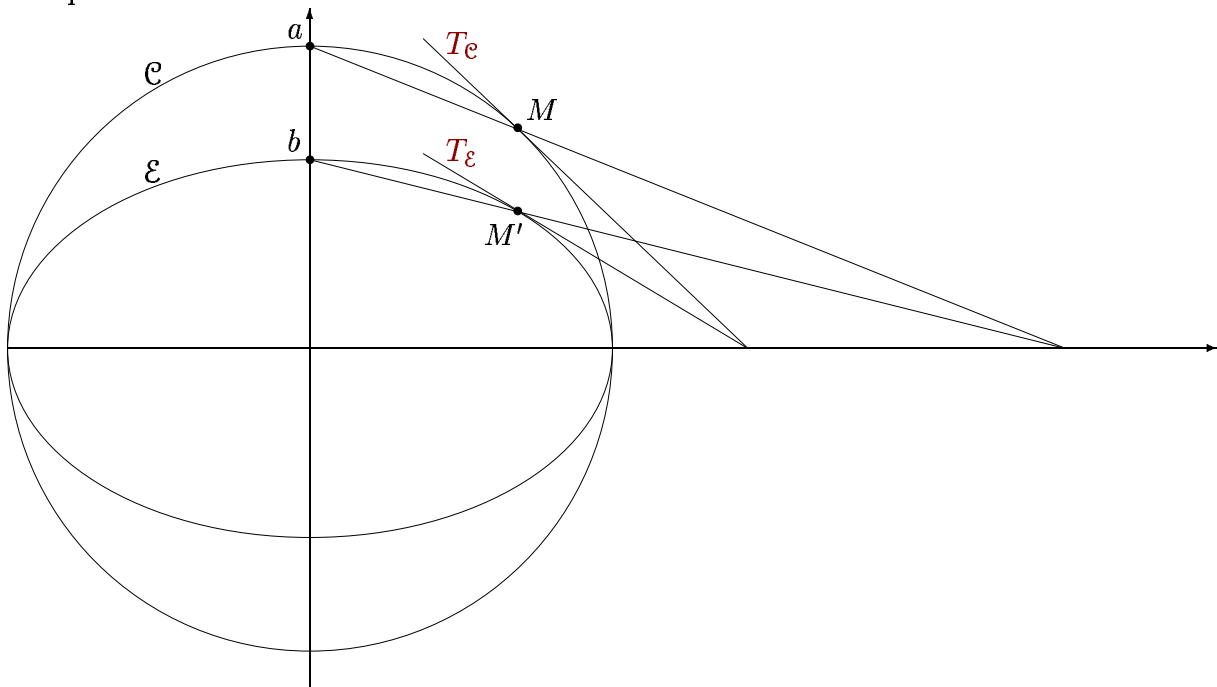
Or $\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|}$ est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure à l'angle $\widehat{FMF'}$, on en déduit que la tangente est dirigée par un vecteur orthogonal à cette bissectrice intérieure, c'est donc la bissectrice extérieure de $\widehat{FMF'}$. ■

On obtient alors la construction de tangente et de normale à une ellipse:



0.3 Compléments.

La tangente d'une ellipse peut être aussi construite en utilisant l'affinité orthogonale explicitée précédemment:



On a aussi:

Théorème 0.3.1.

Toute tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{H} coupe les asymptotes en deux points symétriques par rapport à M .

Démonstration. On se place dans le repère porté par les asymptotes, ainsi l'hyperbole a pour équation $y = \frac{\alpha}{x}$ et $M(t) \in \mathcal{H}$ a pour coordonnées $(t, \frac{\alpha}{t})$. Le vecteur directeur \vec{v} de \mathcal{T}_M a pour coordonnées $(1, -\frac{\alpha}{t^2})$. Dans le repère proposé, $U(0, u)$, or $\overrightarrow{MU} = k\vec{v}$ ainsi

$$\begin{cases} -t = k \\ u - \frac{\alpha}{t} = -\frac{k\alpha}{t^2} \end{cases} ,$$

d'où $u = \frac{2\alpha}{t}$ et de la même manière $v = 2t$ et par conséquent $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{VM} = (-t, \frac{\alpha}{t})$. ■

Construction:

Si on appelle Δ et Δ' les asymptotes à l'hyperbole, on construit l'image de l'asymptote Δ par rapport à M et on note T' l'intersection de cette image avec Δ' alors le théorème de Thalès donne que $(T'M)$ est la tangente recherchée.