Orthogonalité dans l'espace affine euclidien: droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.

Pré-requis:
- Définition d'un espace vectoriel et la connaissance de la structure d'espace affine de l'espace (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- Définition du produit scalaire et expression analytique dans une base orthonormée.
- Position relative de variétés affines (confondues, parallèles, distinctes et sécantes).

Cadre: On se place dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

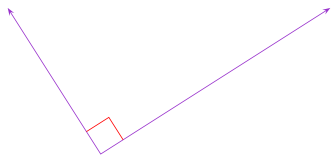
0.1 Orthogonalité dans l'espace affine euclidien.

Dans cette partie, on notera n la dimension de $\mathcal{E}$.

Définition 0.1.1.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux (ou normaux), que l'on notera $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, lorsque leur produit scalaire est nul.

Une base orthogonale d'un espace euclidien est une base formée de vecteurs orthogonaux. Cette base sera dite orthonormée, lorsque tous ces vecteurs seront normés.

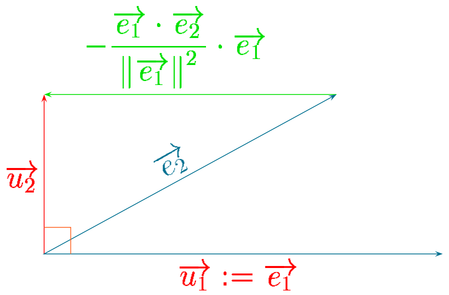
Sur une figure, on peut représenter l'orthogonalité de deux vecteurs de la façon suivante:



Théorème 0.1.2.
L'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ possède des bases orthonormées.

Démonstration. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Posons $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_2} - \lambda \overrightarrow{e_1}$. Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} - \lambda \left\| \overrightarrow{e_1} \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}}{\left\| \overrightarrow{e_1} \right\|^2}. \end{aligned}$$



Vérifions que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est encore une base de $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, comme $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un espace vectoriel de dimension deux, il suffit de montrer que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont libres; soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$, en remplacant on a

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}}{\|\overrightarrow{e_1}\|^2}\right)\cdot\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\cdot\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}.$$

Or $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}}{\|\overrightarrow{e_1}\|^2}\lambda_2 = 0$ d'où le résultat souhaité.

On suppose ensuite par hypothèse de récurrence la construction de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_{k-1}}$ faite de sorte que ces vecteurs soient deux à deux orthogonaux et forment une base de $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_{k-1}})$, on construit ensuite:

$$\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{e_k} - \frac{\overrightarrow{e_k}\cdot\overrightarrow{u_{k-1}}}{\|\overrightarrow{u_{k-1}}\|^2}\cdot\overrightarrow{u_{k-1}} - \frac{\overrightarrow{e_k}\cdot\overrightarrow{u_{k-2}}}{\|\overrightarrow{u_{k-2}}\|^2}\cdot\overrightarrow{u_{k-2}} - \cdots - \frac{\overrightarrow{e_k}\cdot\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|^2}\cdot\overrightarrow{u_1},$$

et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}$ sont par construction deux à deux orthogonaux et forment une base de $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_k})$. En poursuivant jusqu'à l'indice n, on obtient une base orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Il ne reste plus qu'à normer $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ (en les divisant par leur norme respective) pour obtenir le résultat souhaité. ■

Remarques:
- Cet algorithme est appelé procédé d'orthonormalisation de *Gram-Schmidt*.
- La démonstration précédente fait apparaître le vecteur $\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}}{\|\overrightarrow{e_1}\|^2}\cdot\overrightarrow{e_1}$ que l'on appelera le projeté orthogonal de $\overrightarrow{e_2}$ sur $\overrightarrow{e_1}$ et que l'on notera $\overrightarrow{p}_{\overrightarrow{e_1}}(\overrightarrow{e_2})$.

Définition 0.1.3.

Deux parties F et G de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont dites orthogonales si

$$\forall\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F \times G, \qquad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

L'orthogonal d'une partie F de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (noté $F^\perp$) est l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F:

$$F^\perp := \left\{\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}\ |\forall\overrightarrow{v} \in F, \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0\right\}.$$

Remarques:
- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
- Deux sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont orthogonaux si, et seulement si les vecteurs de base de l'un sont orthogonaux aux vecteurs de base de l'autre.

Théorème 0.1.4.
Soit $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on a:

$$\dim \overrightarrow{\mathcal{F}} + \dim \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp} = \dim \overrightarrow{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}.$$

Démonstration. Soit $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$, alors $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 0$ et par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, obtenue en complétant une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$. Soit $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ de composante $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$.

Si $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$, alors

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{e_i} = 0,$$

c'est-à-dire $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Si $\overrightarrow{x}$ est tel que $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, alors $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u_i} = 0$; il est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}$ et par linéarité du produit scalaire, $\overrightarrow{x}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de ces vecteurs et par conséquent $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. On a alors que $(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$ et l'on a $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. ■

0.2 Orthogonalité dans un espace de dimension 3.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

Définition 0.2.1.
On dira que deux variétés affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonales lorsque leurs espaces vectoriels associés $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ sont orthogonaux, on le notera $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.

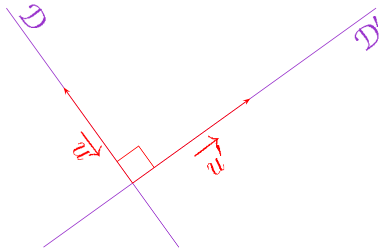
Remarques:

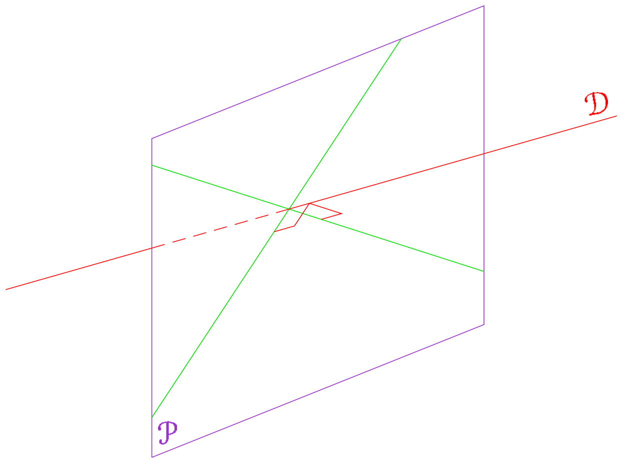
- L'orthogonalité ne dépend que des directions et est donc stable par parallélisme.
- Si elle n'est pas vide, l'intersection de deux variétés affines orthogonales est réduite à un point car leurs directions sont en somme directe orthogonale.

Voici quelques propriétés découlant directement de la définition:

Propriétés 0.2.2.
Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$.

- $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u'}$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
- $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$ si, et seulement si $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans $\mathcal{P}$.
- Il existe un unique plan orthogonal $\mathcal{D}$ passant par un point donné.
- Il existe une unique droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par un point donné.





Démonstration. • La première propriété découle directement de la définition.

- Soient $\mathcal{D}_1\,(A_1, \overrightarrow{u_1})$ et $\mathcal{D}_2\,(A_2, \overrightarrow{u_2})$ les deux droites sécantes incluses dans $\mathcal{P}$ orthogonales à $\mathcal{D}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont libres (sinon $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ seraient parallèles ou confondues) et forment donc une base de $\mathcal{P}$. Or par hypothèse $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{u_2}$, donc $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$.
  Réciproquement, si $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$, soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ une base de $\mathcal{P}$. Si on prend deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par un point de $\mathcal{P}$ et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui sont incluses dans $\mathcal{P}$.
- Il suffit de remarquer que $\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ est un plan vectoriel et que la donnée d'un point fournit un plan unique.
- Il suffit de remarquer que $\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$ est une droite vectorielle et que la donnée d'un point fournit une droite unique.

∎

Définition 0.2.3.
Deux plans sont dits perpendiculaires si leurs directions normales sont orthogonales.

Remarques:

- La terminologie "plan orthogonaux" est inadéquat ici, car les directions ne sont pas des plans vectoriels orthogonaux (leur intersection n'est pas réduite à l'origine).
- La perpendicularité de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une propriété de leurs seules directions $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}'}$: $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$ est orthogonale à la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}'} = \overrightarrow{\mathcal{P}'}^{\perp}$.

Proposition 0.2.4.
Un plan $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}'$ si, et seulement si il contient une droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{P}'$.

Démonstration. Soient $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}'} = \overrightarrow{\mathcal{P}'}^{\perp}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Par hypothèse, $\overrightarrow{\mathcal{D}'} \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$, ainsi toute droite $\mathcal{D}'$ passant par un point M de $\mathcal{P}$ et de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}'}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

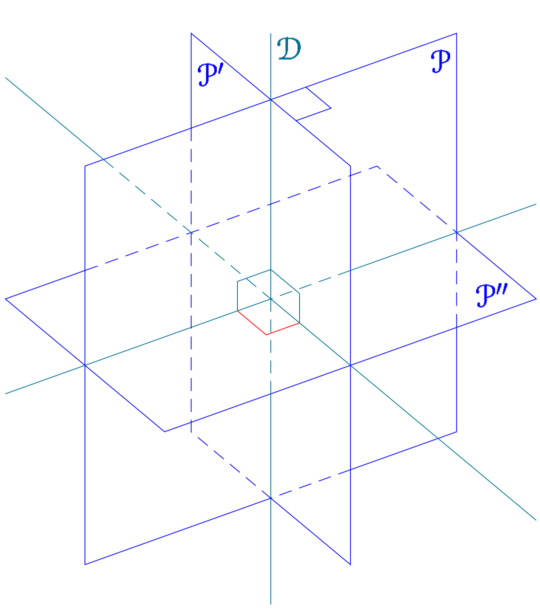
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\mathcal{P}$ contient une droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{P}'$, alors $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$ est orthogonale à $\overrightarrow{\mathcal{D}'} = \overrightarrow{\mathcal{P}'}^{\perp}$, les deux plans ont alors leurs directions normales orthogonales et sont donc perpendiculaires.

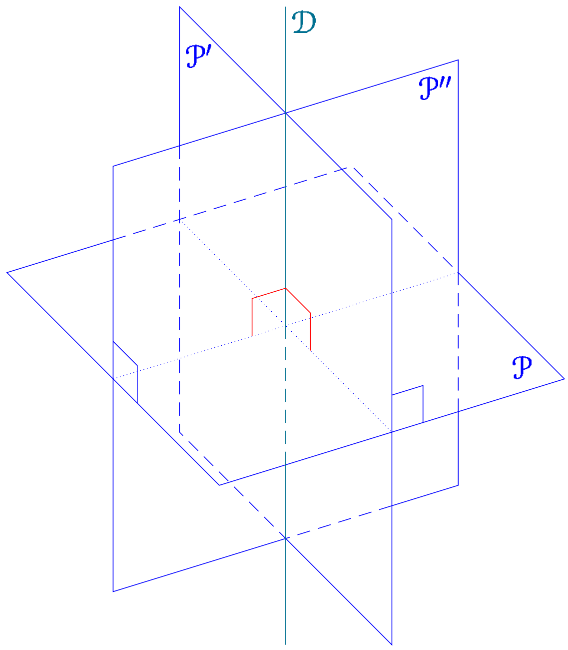
∎

Afin d'affiner la vision de deux plans perpendiculaires, voici:

Propriétés 0.2.5.
Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ des plans de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ des droites de $\mathcal{E}$.

- Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires d'intersection $\mathcal{D}$, tout plan $\mathcal{P}''$ orthogonal à $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en deux droites orthogonales.
- Si $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont perpendiculaires à $\mathcal{P}$ et se coupent en une droite $\mathcal{D}$, celle-ci est orthogonale à $\mathcal{P}$. Ainsi, l'ensemble des plans perpendiculaires à un plan $\mathcal{P}$ et passant par un point O de $\mathcal{P}$ a pour intersection la droite orthogonale en O à $\mathcal{P}$.





Démonstration.
- On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}'' = \{M\}$, où M est un point de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}''$, elle coupe $\mathcal{D}$ en un point M. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ passant par M. Alors $\overrightarrow{\mathcal{P}'}^{\perp} = \overrightarrow{\mathcal{D}_2}$ et par conséquent $\overrightarrow{\mathcal{D}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{P}''}$. Or $\mathcal{D}$ passe par $M \in \mathcal{P}''$, donc $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}''$.
- On constate simplement que $\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$ est une direction commune de $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ et par conséquent $\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp} = \overrightarrow{\mathcal{D}}$.

■

Proposition 0.2.6.
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires. Il existe une unique droite Δ orthogonale et sécante à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Cette droite est appelée la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Démonstration. Les plans vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}'}^{\perp}$ sont sécants (sinon $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ seraient parallèles et donc coplanaires), appelons $\overrightarrow{\Delta}$ leur direction commune.

Soient maintenant $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$, de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et $\mathcal{P}'$ le plan contenant $\mathcal{D}'$, de direction $\overrightarrow{\Delta}$, ils sont sécants en Δ (car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires et leur direction commune est $\overrightarrow{\Delta}$). Le droite Δ vérifie bien les propriétés souhaitée et son unicité provient de l'unicté de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. ■