

# Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

**Cadre:** Plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

## Pré-requis:

- ◇ Ecriture algébrique d'un nombre complexe (en particulier la notion de conjugaison).
  - ◇ Représentation géométrique d'un nombre complexe (en particulier la définition d'affixe).
  - ◇ Tout point  $M(z)$  du cercle unité s'écrit  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  avec  $\theta \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ .
  - ◇ Théorème de l'arc capable.
- Dans cet exposé,  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

## 0.1 Module d'un nombre complexe.

### Définition 0.1.1.

Le module d'un nombre complexe  $z$  est le nombre réel positif noté  $|z|$  et défini par

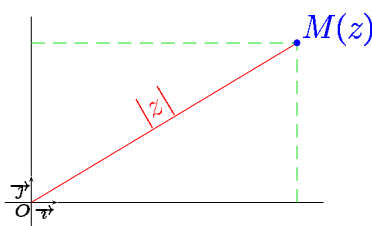
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Conséquence directe:**  $|z| = |\bar{z}|$ .

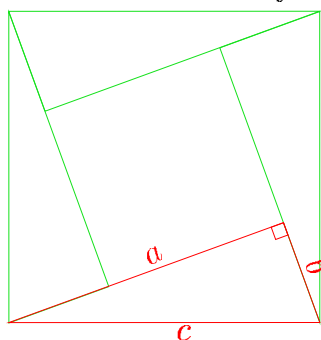
### Proposition 0.1.2.

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ , alors

$$|z| = OM.$$



*Démonstration.* Il suffit de démontrer le théorème de Pythagore;



L'aire du grand carré est égal à l'aire des quatre triangles et du petit carré:

$$c^2 = 4 \left( \frac{1}{2} ba \right) + (b - a)^2 = b^2 + a^2.$$

■

**Propriétés 0.1.3.**

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes:

- 
- 
- 

$$\operatorname{Re} z \leq |z| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$|zz'| = |z| \cdot |z'| \text{ et pour tout } z' \neq 0, \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

**Remarques:** Pour tout  $z$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$  et  $\operatorname{Im} z = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^+$ .

**Proposition 0.1.4.**

(Inégalité triangulaire)

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes, alors

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

*Démonstration.* Nous allons d'abord montrer la dernière inégalité puis l'utiliser pour montrer la première:

◇

$$\begin{aligned} |z + z'| \leq |z| + |z'| &\Leftrightarrow |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \\ &\Leftrightarrow (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \leq z\bar{z} + 2|zz'| + z'\bar{z}' \\ |z + z'| \leq |z| + |z'| &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq 2|zz'| \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

◇

$$|z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'| \Rightarrow |z| - |z'| \leq |z + z'|$$

et

$$|z' + z - z| \leq |z + z'| + |z| \Rightarrow |z'| - |z| \leq |z + z'|$$

donc

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'|.$$

■

## 0.2 Argument d'un nombre complexe non nul.

### Définition 0.2.1.

Si  $z \neq 0$ , un argument de  $z$ , noté  $\arg z$  est un nombre réel  $\theta$  tel que:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Le second membre de cette égalité est la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$ .

**Remarques:** Cette définition est justifiée par le fait que  $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$ . Ainsi,  $\arg z$  est défini modulo  $2\pi$ , comme étant un réel  $\theta$  tel que:

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Notation:** On note  $\text{Arg}z$  l'argument de  $z$  de  $[0, 2\pi]$ .

### Propriétés 0.2.2.

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls, alors:

(i)

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi].$$

(ii)

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \equiv \arg \bar{z} [2\pi].$$

(iii)

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi].$$

(iv)  $\forall p \in \mathbb{Z}$ ,

$$\arg(z^p) \equiv p \cdot \arg z [2\pi].$$

*Démonstration.* (i) Ecrivons  $z$  et  $z'$  sous leur forme trigonométrique:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta'),$$

et rappelons les formules trigonométriques suivantes:

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$$

et

$$\sin(\theta + \theta') = \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta'.$$

$$\begin{aligned} zz' &= |zz'|(\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ &= |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Donc

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi].$$

(ii) En rappelant que  $z\bar{z} = |z|^2$ , on a:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}(\cos \theta - i \sin \theta) = \left| \frac{1}{z} \right| (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)),$$

d'où

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \equiv \arg \bar{z} [2\pi].$$

(iii) Puisque  $\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'}$ , cette assertion devient immédiate avec ce que l'on vient de démontrer.

(iv) Nous allons faire une démonstration par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$  (en sachant que la démonstration sur les entiers négatifs est similaire): Pour  $p = 0$ ,  $1 = |1|(\cos 0 + i \sin 0)$  donc  $\arg(z^0) = \arg(1) \equiv 0[2\pi]$ .

Supposons la relation demandée vraie au rang  $p$  et montrons qu'elle reste vraie au rang  $p + 1$ :

$$\begin{aligned} \arg(z^{p+1}) &\equiv \arg(z^p \cdot z)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z^p) + \arg z [2\pi] \quad (\text{par (i)}) \\ &\equiv p \cdot \arg z + \arg z [2\pi] \\ \arg(z^{p+1}) &\equiv (p + 1) \cdot \arg z [2\pi]. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

## 0.3 Interprétations géométriques et lignes de niveau.

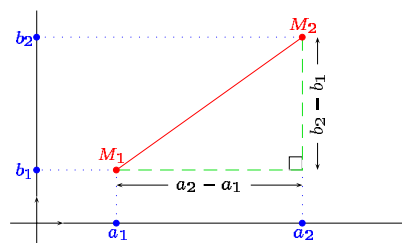
### 0.3.1 Module et distance.

#### Proposition 0.3.1.

Soit  $M_1$  le point d'affixe  $z_1$  et  $M_2$  le point d'affixe  $z_2$ , alors:

$$M_1M_2 = |z_2 - z_1|.$$

*Démonstration.* On écrit  $z_1 = a_1 + ib_1$  et  $z_2 = a_2 + ib_2$ :



D'après le théorème de Pythagore, on a:

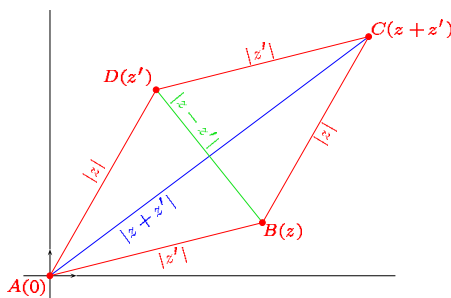
$$M_1M_2 = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = |z_2 - z_1|.$$

**Exercice:** Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ , calculer  $|z + z'|^2 + |z - z'|^2$  et interpréter le résultat géométriquement dans le parallélogramme.

*Démonstration.* On écrit,  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 + |z - z'|^2 &= (a + a')^2 + (b + b')^2 + (a - a')^2 + (b - b')^2 \\ &= a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2 + 2bb' + b'^2 + a^2 - 2aa' + a'^2 + b^2 - 2bb' + b'^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2) \\ |z + z'|^2 + |z - z'|^2 &= 2(|z|^2 + |z'|^2). \end{aligned}$$

Soit  $ABCD$  un parallélogramme quelconque, choisissons le repère orthonormal  $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ :



Ainsi, d'après le calcul précédent, la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés. ■

### 0.3.2 Arguments et angles.

**Proposition 0.3.2.**

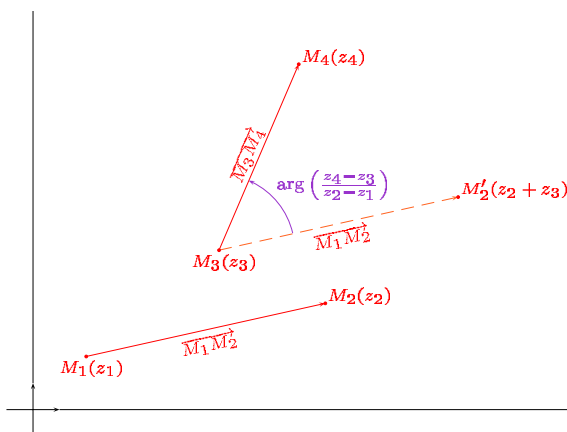
Soient  $M_1, M_2, M_3, M_4$  des points distincts du plan d'affixes respectifs  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , alors:

(i)

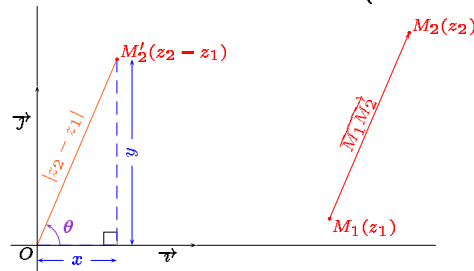
$$\left( \overrightarrow{i}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) \equiv \arg(z_2 - z_1)[2\pi].$$

(ii)

$$\left( \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4} \right) \equiv \arg \left( \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \right) [2\pi].$$



*Démonstration.* (i) Faisons une figure, en posant  $\theta := \left( \vec{v}, \overrightarrow{M_1 M_2} \right)$ .

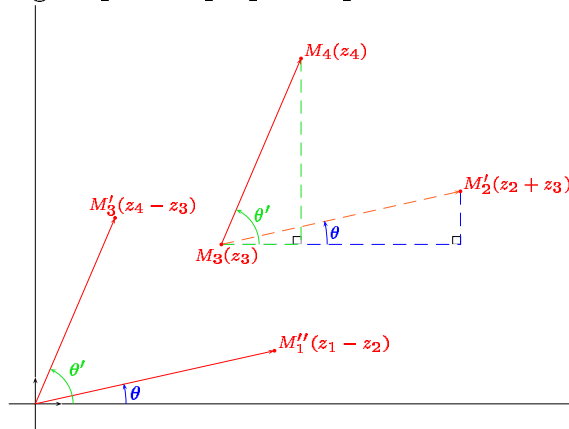


Ainsi,  $z_2 - z_1 = x + iy$ . Or  $x = |z_2 - z_1| \cdot \cos \theta$  et  $y = |z_2 - z_1| \cdot \sin \theta$ , d'où

$$z_2 - z_1 = |z_2 - z_1| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Donc  $\theta \equiv \arg(z_2 - z_1)[2\pi]$ .

(ii) Là encore, faisons une figure pour expliquer le phénomène:



L'angle recherché est donc  $\theta' - \theta[2\pi]$ , or d'après (i), on a:

$$\theta' - \theta \equiv \arg(z_4 - z_3) - \arg(z_2 - z_1)[2\pi],$$

c'est-à-dire:

$$\theta' - \theta \equiv \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right)[2\pi].$$

■

### 0.3.3 Lignes de niveau.

#### Définition 0.3.3.

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et  $k$  un nombre réel, on appelle lignes de niveau associées à  $f$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  vérifiant

$$f(z) = k.$$

#### Exemples:

- Lignes de niveau associées à

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto |z|.$$

- ◊ Si  $k > 0$ , la ligne de niveau associée est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $k$ .

- ◇ Si  $k = 0$ , la ligne de niveau associée est réduite au point  $O$ .
- ◇ Si  $k < 0$ , la ligne de niveau associée est l'ensemble vide.
- Lignes de niveau associées à

$$g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \operatorname{arg} z .$$

Se sont les demi-droites d'origine  $O$  ( $O$  exclu) et d'angle polaire  $k[2\pi]$ .

## 0.4 Applications.

### 0.4.1 Equation complexe d'un cercle.

#### Proposition 0.4.1.

Le point  $M$  d'affixe  $z$  appartient au cercle de centre  $C$  d'affixe  $c$  et de rayon  $r$  si, et seulement si

$$|z - c| = r$$

ou si, et seulement si

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = r^2.$$

*Démonstration.* C'est une simple traduction du fait que tous les points d'un cercle sont à la même distance du centre du cercle. ■

### 0.4.2 Cocyclicité.

#### Proposition 0.4.2.

Soient quatre points distincts  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  d'affixes respectives  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$ . Alors,  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sont cocycliques si, et seulement si

$$\arg \left( \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \right) \equiv \arg \left( \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \right) [\pi]$$

ou si, et seulement si

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}}{\frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}} \in \mathbb{R}.$$

On appelle  $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$  le rapport anharmonique des quatre points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ .

*Démonstration.* D'après le théorème de l'arc capable, les quatre points  $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$  et  $M_4(z_4)$  appartiennent à un même cercle si, et seulement si

$$\left( \overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 M_4} \right) \equiv \left( \overrightarrow{M_2 M_3}, \overrightarrow{M_2 M_4} \right) [\pi].$$

Or

$$\left( \overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 M_4} \right) \equiv \arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} [2\pi]$$

et

$$\left(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}\right) \equiv \arg \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} [2\pi],$$

donc

$$\arg \left( \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \right) \equiv \arg \left( \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \right) [\pi].$$

Ainsi,

$$\arg \left( \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \right) - \arg \left( \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \right) \equiv 0[\pi],$$

c'est-à-dire

$$\arg(W(z_1, z_2, z_3, z_4)) \equiv 0[\pi].$$

Donc  $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$  est un réel. ■

**Exercice:** *Théorème des six cercles de Miquel.* Soient  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  quatre cercles du plan, on appelle

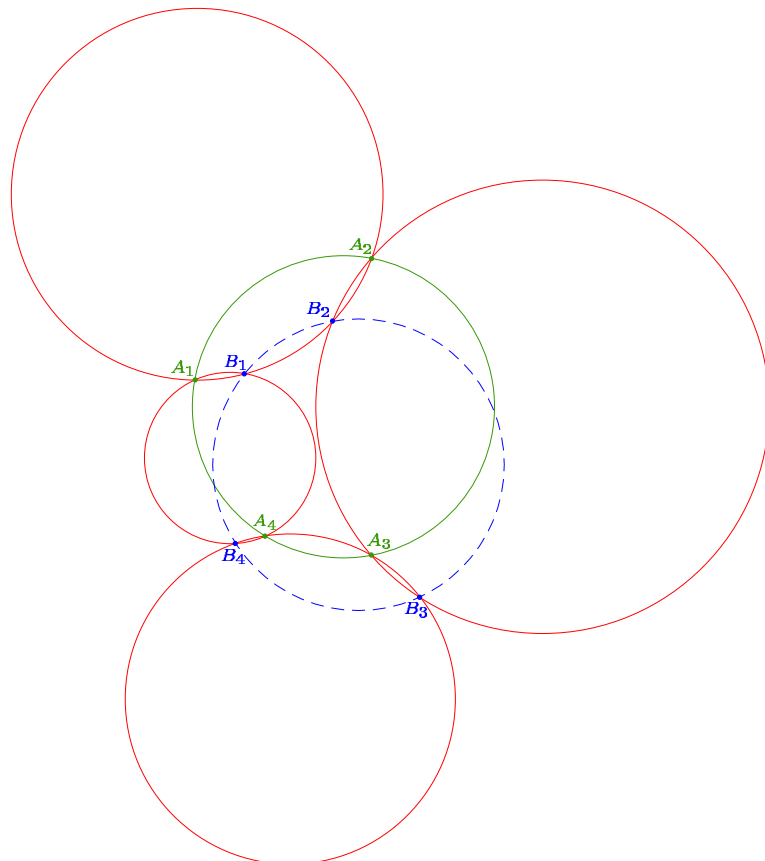
$A_1(z_1), B_1(w_1)$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ,

$A_2(z_2), B_2(w_2)$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ ,

$A_3(z_3), B_3(w_3)$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ ,

$A_4(z_4), B_4(w_4)$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_1$ .

Montrer que si  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques, alors  $B_1, B_2, B_3, B_4$  le sont aussi.





*Démonstration.* Supposons que  $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3), A_4(z_4)$  soient cocycliques, alors d'après ce qui précède,  $W(z_1, z_3, z_2, z_4)$  est réel.

Les points  $A_1(z_1), B_1(w_1), A_2(z_2), B_2(w_2)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_2$  donc  $W(z_1, w_2, z_2, w_1)$  est réel.

Les points  $A_2(z_2), B_2(w_2), A_3(z_3), B_3(w_3)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_3$  donc  $W(w_2, z_3, z_2, w_3)$  est réel.

Les points  $A_3(z_3), B_3(w_3), A_4(z_4), B_4(w_4)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_4$  donc  $W(w_4, z_3, w_3, z_4)$  est réel.

Les points  $A_4(z_4), B_4(w_4), A_1(z_1), B_1(w_1)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_1$  donc  $W(z_1, w_4, w_1, z_4)$  est réel.

On remarque ensuite que:

$$\frac{W(z_1, w_2, z_2, w_1)}{W(z_1, w_4, w_1, z_4)} \cdot \frac{W(w_4, z_3, w_3, z_4)}{W(w_2, z_3, z_2, w_3)} = W(z_1, z_3, z_2, z_4) \cdot W(w_1, w_3, w_2, w_4).$$

Or le premier terme de l'égalité est réelle et  $W(z_1, z_3, z_2, z_4)$  est aussi un réel donc  $W(w_1, w_3, w_2, w_4)$  est réel, ce qui signifie que  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$  sont cocycliques. ■