Homothéties et translations; transformation vectorielle associée. Invariants élémentaires: effet sur les directions, l'alignement, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

Pré-requis:
- La structure d'espace affine du plan et de l'espace.
- Définition d'une application affine.
- Une application est affine si, et seulement si elle conserve les barycentres.
- Définition d'une droite et de son vecteur directeur.
- Définition d'un espace affine euclidien.
- Le théorème de Thalès.
- Définition de mesure algèbrique.

Cadre: On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ et on note $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel associé.

0.1 Homothéties et translations.

Définition 0.1.1.
Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application

$$t_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{telle que} \quad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

Soit $O \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie de centre O et de rapport k est l'application

$$H_{O,k} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{telle que} \quad \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Notation: Désormais, nous noterons M' l'image par une application du point M, N' celle de N, ...

Remarque: Si $k = -1$, on dit que $H_{O,-1}$ est une symétrie centrale de centre O.

Proposition 0.1.2.
Les translations et les homothéties sont des applications affines d'applications linéaires associées l'identité et:

$$\overrightarrow{H_k} : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & k \cdot \overrightarrow{v} \end{array},$$

qu'on appelle homothétie vectorielle de rapport k.

Démonstration. Soient M et N deux points de $\mathcal{E}$ et $M' := t_{\overrightarrow{u}}(M)$ et $N' := t_{\overrightarrow{u}}(N)$. Alors par définition $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MN}$ (relation de Chasles).

Soient M et N deux points de $\mathcal{E}$ et $M' := H_{O,k}(M)$ et $N' := H_{O,k}(N)$. Alors par définition $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{ON}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{MO} + k \cdot \overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{MN}$. ■

Conséquence: Les homothéties et les translations conservent les barycentres.

0.2 Les invariants élémentaires.

Proposition 0.2.1.
Les homothéties et les translations conservent l'alignement des points et le parallélisme des droites.

Démonstration. Soit f une homothétie ou une translation et $\overrightarrow{f}$ son application vectorielle associée; $\overrightarrow{f}$ est donc une homothétie vectorielle de rapport k. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit $M \in \mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{AM} = k'\overrightarrow{u}$. En appliquant $\overrightarrow{f}$ à cette relation, on obtient: $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = k \cdot \overrightarrow{AM} = kk'\overrightarrow{u}$ car c'est une homothétie vectorielle, de plus $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$ d'où $\overrightarrow{f(A)f(M)} = kk'\overrightarrow{u}$; donc l'image par f de $\mathcal{D}$ est une droite passant par $f(A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. ■

Proposition 0.2.2.
Dans un espace affine euclidien, les translations conservent les distances et les homothéties multiplient les distances par $|k|$.

Démonstration. Découle directement des définitions. ■

0.3 Le groupe des homothéties translations.

Théorème 0.3.1.
Les applications affines f dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle sont les homothéties et les translations.

Démonstration. Si $\overrightarrow{f}$ est l'identité, alors pour tout couple (M, N) de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} + \overrightarrow{N'M'} = \overrightarrow{NN'}$, par conséquent f est une translation.

Soit maintenant $\overrightarrow{f} = k \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$, où $k \neq 1$. Fixons I un point de $\mathcal{E}$ et soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{II'} + k \cdot \overrightarrow{IM}.$$

Cherchons les points fixes de f; M est un point fixe de f si, et seulement si $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{II'} + k \cdot \overrightarrow{IM}$, c'est-à-dire:

$$\overrightarrow{IM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}; \qquad \text{(car } k \neq 1.)$$

il y a donc un unique point fixe O et on a pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Par suite, f est l'homothétie $H_{O,k}$. ■

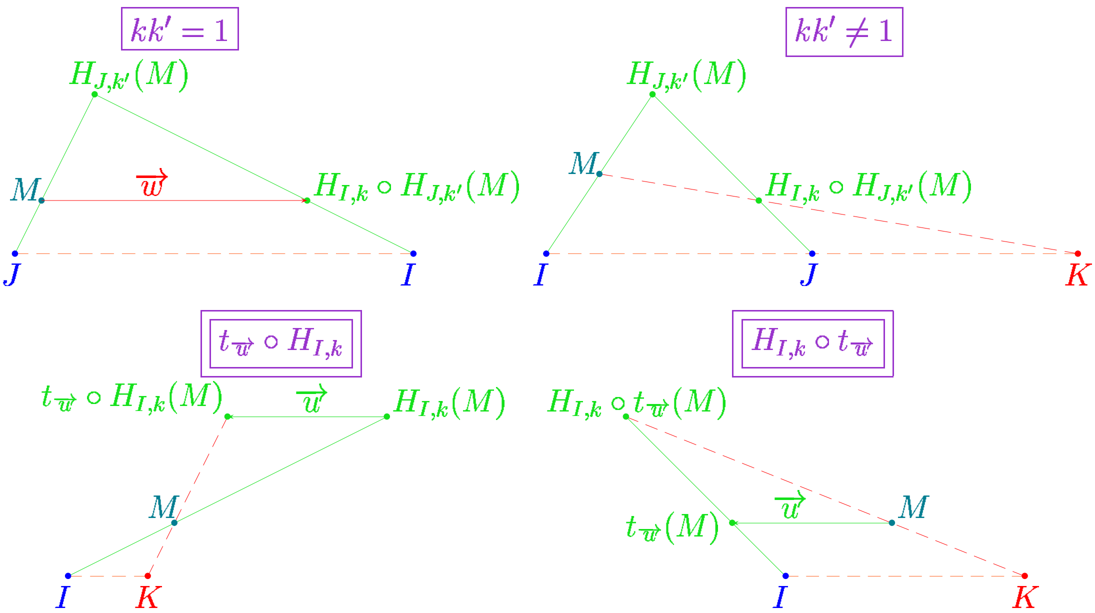
Corollaire 0.3.2.
Les homothéties et translations forment un groupe $\mathcal{G}$ pour la loi de composition.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{G}$ est stable par produit et par passage à l'inverse car ses éléments sont caractérisés par le fait que leur application linéaire associée est une homothétie vectorielle et le produit ou l'inverse d'homothéties vectorielles en est encore une; c'est donc un groupe. ■

Propriétés 0.3.3.

$\circ$	$H_{J,k'}$	$t_{\overrightarrow{v}}$
$H_{I,k}$	$kk'=1,\quad t_{\alpha\overrightarrow{IJ}}$ $kk'\neq 1,\quad H_{K,kk'}$	$H_{K,k}$
$t_{\overrightarrow{u}}$	$H_{K,k'}$	$t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$

$$\boxed{H_{I,k}\circ H_{J,k'}:}$$



Démonstration. Montrons tout d'abord la fonctorialité de deux applications affines f et g, c'est-à-dire: $\overrightarrow{f\circ g} = \overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{g}$. Soit $(M,N)\in\mathcal{E}^2$. Si $g(M)=M'$, $f(M')=M''$, $g(N)=N'$ et $f(N')=N''$. Comme f et g sont affines, $\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{M'N'}\right) = \overrightarrow{M''N''}$ donc

$$\overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{f\circ g(M) f\circ g(N)},$$

et par définition, $\overrightarrow{f\circ g} = \overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{g}$.

- Le produit de deux homothéties $H_{I,k}$ et $H_{J,k'}$:
Par fonctorialité, l'application vectorielle associée à $H_{I,k} \circ H_{J,k'}$ est l'homothétie vectorielle de rapport kk'.
   - si $kk' = 1$, le produit est une translation de vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{JJ'}$, où $J' := H_{I,k} \circ H_{J,k'}(J)$. Or, $H_{J,k'}(J) = J$ et $H_{I,k}(J) = J'$ tel que $\overrightarrow{IJ'} = k\overrightarrow{IJ}$. Par conséquent, $\overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IJ'} = (k-1)\overrightarrow{IJ}$.
   - Si $kk' \neq 1$, le produit est une homothétie de centre K.
   Explicitons K: Posons $K' := H_{J,k'}(K)$, on a $\overrightarrow{JK'} = k'\overrightarrow{JK}$ et $H_{I,k}(K') = K$ (car K est le centre de l'homthétie $H_{I,k} \circ H_{J,k'}$), donc $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IK'}$. Par suite,

$$\overrightarrow{IK} = k\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK'}\right) = k\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{JK} = k\overrightarrow{IJ} + kk'\left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IK}\right).$$

   Donc

$$\overrightarrow{IK} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ},$$

   ainsi I, J et K sont alignés.
- Toujours par fonctorialité, $t_{\overrightarrow{u}} \circ H_{J,k'}$ son application linéaire associée est $k'\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ ($k' \neq 1$); c'est donc une homothétie de centre K.
Remarque: Si on pose $K' := H_{J,k'}(K)$, alors $\overrightarrow{JK'} = k'\overrightarrow{JK}$ et $K = t_{\overrightarrow{u}}(K')$, ainsi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{K'K} = \overrightarrow{K'J} + \overrightarrow{JK} = (1-k')\overrightarrow{JK}$. Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (JK).
- La même démonstration que précédemment montre que $H_{I,k} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ est une homothétie de centre K tel que $\overrightarrow{v} = \frac{1-k}{k}\overrightarrow{IK}$.

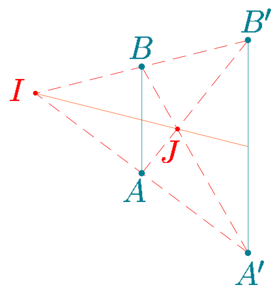
■

Remarques:
- ◇ Le produit de deux homothéties de même centre commutent.
- ◇ Le produit h de trois homothéties de centre A, B, C est une homothétie ou une translation. Si h est une homothétie, son centre appartient au plan (ABC) et si c'est une translation son vecteur est parallèle au plan (ABC) ou à la droite contenant A, B, C losque ces points sont alignés.
- ◇ Les symétries centrales et translations forment un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

0.4 Action sur les configurations usuelles.

0.4.1 Homothéties et segments.

✎ **Proposition 0.4.1.**
Soit $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments parallèles tels que $A \neq B$, $A' \neq B'$ et $\overrightarrow{A'B'} \neq \pm\overrightarrow{AB}$. Alors, il existe exactement deux homothéties transformant $[AB]$ en $[A'B']$, de rapports opposés et de centres alignés avec les milieux de $[AB]$ et $[A'B']$.



Démonstration. Une homothétie répondant à la question transforme le couple (A, B) en (A', B') ou (B', A'). Dans le premier (respectivement le second) cas, le centre est l'intersection de (AA') et (BB') (respectivement (AB') et (BA')). Les rapports d'homothéties correspondant à ces deux cas sont $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}$ et $\frac{\overline{JB'}}{\overline{JA}}$. Réciproquement, ces deux homothéties répondent à la question. L'alignement des deux milieux des segments avec les centres d'homothétie vient du fait que toute homothétie conserve les milieux. ■

Remarque: Si $\overrightarrow{A'B'} = \pm\overrightarrow{AB}$, il y a encore une homothétie et une translation qui transforme $[AB]$ en $[A'B']$.

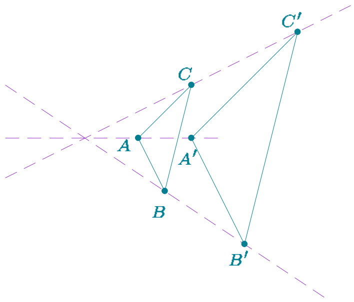
0.4.2 Le théorème de Desargues.

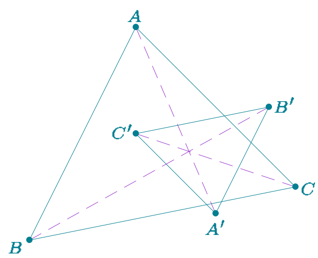
Théorème 0.4.2.

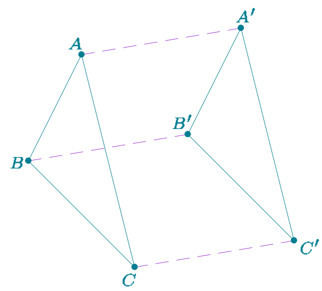
Théorème de Desargues.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non plats d'un espace affine avec A, A' distincts ainsi que B, B' et C, C'.

Alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont homothétiques ou translatés l'un de l'autre si, et seulement si les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ sont respectivement parallèles aux côtés $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'A']$.







Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Les homothéties et translations conservant le parallélisme, le résultat est évident.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose les côtés correspondant parallèles.

Si (AA'), (BB'), (CC') ne sont pas parallèles, alors (AA') et (BB') se coupent en I et d'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = k.$$

L'homothétie de centre I de rapport k transforme A en A', B en B', la droite (AC) en une droite parallèle passant par A' et qui est donc $(A'C')$. De même (BC) est transformée en $(B'C')$ et le point C qui est à l'intersection de (AC) et (BC) est tranformé en l'intersection C' de $(A'C')$ et $(B'C')$; les triangles sont donc homothétiques.

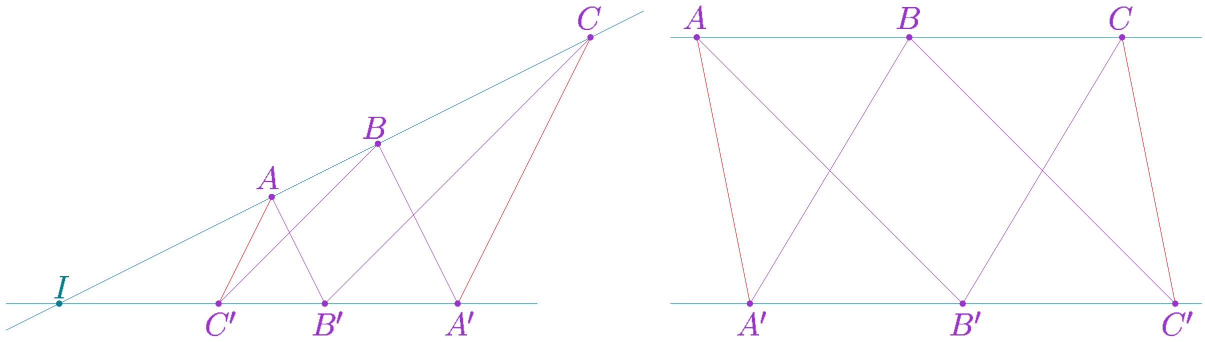
Si (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles, alors $ABB'A'$, $ACC'A'$ et $BCC'B'$ sont des parallèlogrammes, ainsi $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Donc les triangles sont bien translatés l'un de l'autres.

■

0.4.3 Le théorème de Pappus.

Théorème 0.4.3.
Théorème de Pappus.
Soient Δ et Δ' deux droites distinctes du plan affine, A, B, C trois points distincts sur Δ et A', B', C' trois points distincts sur Δ' (tous distincts du point d'intersection eventuel de Δ et Δ').

Si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB'), alors (CA') est parallèle à (AC').



Démonstration. Si Δ et Δ' sont sécantes en I, alors d'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = k \quad \text{et} \quad \frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = k'.$$

On a: $H_{I,k}(A) = B$, $H_{I,k}(B') = A'$, $H_{I,k'}(B) = C$ et $H_{I,k'}(C') = B'$. Ainsi $H_{I,k} \circ H_{I,k'}(C') = A'$ et $H_{I,k'} \circ H_{I,k}(A) = C$. Or deux homothéties de même centre commutent et leur produit est une homothétie donc (AC') et $(A'C)$ sont parallèles. Lorsque Δ et Δ' sont parallèles, on fait le même raisonnement avec des translations. ■

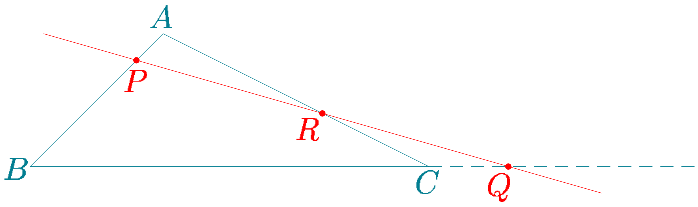
Remarque: En fait, ce théorème est une conséquence du fait que deux homothéties de même centre ou deux translations commutent.

0.4.4 Le théorème de Menelaüs.

Théorème 0.4.4.
Théorème de Menelaüs dans le plan.
Soit un triangle non plat ABC et trois points P, Q, R, différents des sommets, respectivements sur les droites (AB), (BC), (AC).

Les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1.$$



Démonstration. Si P, Q, R sont alignés sur une droite Δ, on considère les trois homothéties $H_{P,\alpha}$, $H_{Q,\beta}$, $H_{R,\gamma}$ avec $\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$, $\beta = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$ et $\gamma = \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$. La composée $f = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta} \circ H_{R,\gamma}$ est une homothétie ou une translation, qui conserve A. Si ce n'est pas une translation , c'est une homothétie de centre A, différente de l'identité et telle que P, Q, R et A soient alignés, ce qui est impossible puisque $A \notin \Delta$. Donc f est une translation fixant A, c'est donc l'identité. Le produit des rapports est donc 1.

Si le produit des rapports est égal à 1, f est alors une translation qui fixe A; c'est donc l'identité. Par conséquent, $(H_{R,\gamma})^{-1} = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta}$ est on sait alors que P, Q, R sont alignés. ∎

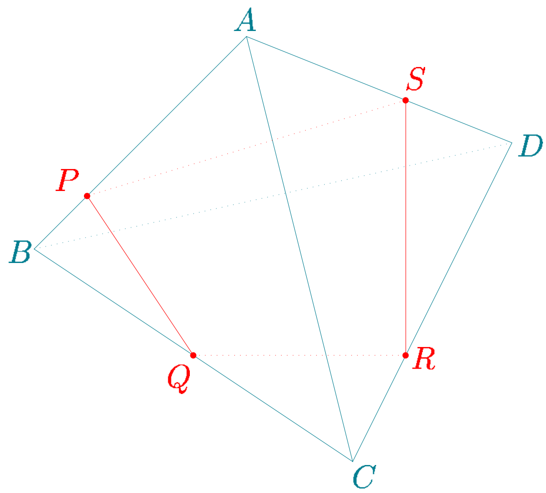
Théorème 0.4.5.

Théorème de Menelaüs dans l'espace.

Soit $ABCD$ un quadrilatère gauche de l'espace (c'est-à-dire A, B, C, D non coplanaires) et des points P, Q, R, S respectivement sur les droites (AB), (BC), (CD), (DA), en dehors des sommets.

Ces points sont coplanaires si, et seulement si

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{SD}}{\overline{SA}} = 1.$$



Démonstration. Si P, Q, R, S sont dans un même plan Π, on considère les quatres homothéties $H_{P,\alpha}$, $H_{Q,\beta}$, $H_{R,\gamma}$, $H_{S,\delta}$ avec $\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$, $\beta = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$, $\gamma = \frac{\overline{RC}}{\overline{RD}}$ et $\delta = \frac{\overline{SD}}{\overline{SA}}$. Alors $f = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta} \circ H_{R,\gamma} \circ H_{S,\delta}$ est une homothétie ou une translation, qui fixe A. Si f est une homothétie de centre A différente de l'identité, elle conserve globalement Π car ce dernier contient les quatre centres: c'est impossible car A n'est pas dans Π, sinon $ABCD$ serait plan. Donc f est une translation et, comme A est fixe, c'est l'identité: le produit des rapports vaut 1.

Si ce produit vaut 1, f est une translation qui conserve A, c'est donc l'identité. Ainsi, $(H_{S,\delta})^{-1} = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta} \circ H_{R,\gamma}$, or le centre de l'homothétie produit est dans le plan des centres des trois autres homothéties, les quatres points sont coplanaires. ∎