Groupe des isométries du plan: Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de leur points invariants.

Pré-requis:

- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine du plan (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- ◇ Définition et principales propriétés d'une application affine.
- ◇ Notion de groupe, d'angle orienté de vecteurs.
- ◇ Définitions des reflexions, translations et rotations (En particulier, une réflexion transforme un angle orienté de vecteurs en son opposé alors que les translations et les rotations les conservent).

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ de plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Notations: Dans cet exposé, on notera s_D la réflexion d'axe D, $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $R_{O,\theta}$ la rotation de centre O et d'angle θ.

0.1 Groupe des isométries du plan.

Définition 0.1.1.
On appelle isométrie affine du plan $\mathcal{P}$, que l'on notera $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$, toute application affine du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui conserve la distance, autrement dit qui vérifie

$$\forall M, N \in \mathcal{P}, \qquad f(M)f(N) = MN.$$

Remarques:

- Nous aurions pu définir une isométrie comme une application qui conserve les distances, puis vérifier qu'elle est toujours affine. Malheureusement, bien que les démonstrations soient élémentaires, elles sont trop longues.
- Les réflexions, translations et rotations sont des isométries.

Théorème 0.1.2.
Toute isométrie affine de $\mathcal{P}$ est bijective.

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'une isométrie f est injective: Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$ vérifiant $M' = N'$ alors $0 = M'N' = MN$ car f est une isométrie et par conséquant $M = N$. Puisque l'on est en dimension finie, cela signifie que f est aussi surjective, d'où le résultat. ∎

Remarque et notation: On appelle transformation du plan toute application bijective du plan et on notera $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ l'ensemble des transformations du plan, $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Proposition 0.1.3.
L'ensemble $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$ est un sous groupe de $(\mathrm{S}(\mathcal{P}), \circ)$.

Démonstration. D'après le théorème précédent, l'ensemble $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$ est inclus dans $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ et n'est pas vide car il contient l'identité.

Si $f \in \mathrm{Is}(\mathcal{P})$ alors pour tous points M et N,

$$f^{-1}(M)f^{-1}(N) = f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N)) = MN,$$

ainsi $f^{-1} \in \mathrm{Is}(\mathcal{P})$.

Soient f et g dans $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$, $\forall M, N \in \mathcal{P}$,

$$f \circ g(M) f \circ g(N) = g(M)g(N) = MN.$$

■

0.2 Décomposition d'une isométrie.

Théorème 0.2.1.
Une isométrie du plan est entièrement déterminée par la donnée de trois points non alignés.

Démonstration. Commençons par montrer qu'une isométrie f fixant trois points non alignés est l'identité: soient A, B, C ces trois points fixes et M un point quelconque de $\mathcal{P}$, avec $f(M) = M'$. Si $M \neq M'$, par conservation de la distance, $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$, ainsi A, B, C appartiennent à la médiatrice $[MM']$ et par conséquent A, B, C sont alignés, ce qui contredit l'hypothèse, donc $M = M'$.

Prenons maintenant, f et g deux isométries coïncidant sur trois points non alignés, alors $f \circ g^{-1}$ fixe ces trois points et par ce qui précède, $f \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ d'où le résultat. ■

Théorème 0.2.2.
Le théorème de Cartan-Dieudonné en dimension 2
Toute isométrie du plan est la composée d'au plus 3 réflexions.

Démonstration. Pour $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, on compose deux fois la même réflexion. Soit alors f une isométrie du plan distincte de l'identité dont l'ensemble de ces points fixes est $\mathcal{F}$. Alors il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $f(A) = A'$ avec $A \neq A'$. Soit $g = s_\Delta \circ f$ où Δ est la médiatrice de $[AA']$. Montrons que l'ensemble des points fixes de g contient F et A. Soit M un point de $\mathcal{F}$, g est une isométrie du plan donc $AM = A'M$, donc $M \in \Delta$, ainsi $g(M) = s_\Delta \circ f(M) = s_\Delta(M) = M$ de plus $g(A) = s_\Delta \circ f(A) = s_\Delta(A') = A$ d'où le résultat.

Si f possède trois points fixes non alignés alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et il n'y a rien à démontrer.

Si f possède exactement deux points fixes, alors il existe $A \in \mathcal{P}$ non aligné avec les points fixes tel que $f(A) = A'$ et $A \neq A'$, l'application g définie précédemment possède alors trois points fixes non alignés, donc $g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et $f = s_\Delta$.

Si f possède exactement un point fixe, alors il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $f(A) = A'$ et $A \neq A'$ et l'application g possède deux points fixes, il existe alors $B \in \mathcal{P}$ non alignés avec ses points fixes tel que $g(B) = B'$ et $B \neq B'$, l'application $h = s_{\Delta'} \circ g$ où Δ' est la médiatrice de $[BB']$ et par ce qui précède h possède trois points fixes non alignés, donc h est l'identité or $h = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ donc $f = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

Si f ne possède pas de points fixe, alors l'application h définie précédemment possède deux points fixes, il existe donc $C \in \mathcal{P}$ non aligné avec les points fixes tel que $h(C) = C'$ et $C \neq C'$ et l'application $i = s_{\Delta''} \circ h$ avec Δ'' la médiatrice de $[CC']$ possède trois points fixes non alignés, ainsi $i = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, or $i = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ f$ donc $f = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$. ∎

Remarque: Ce théorème se généralise en dimension n disant que toute isométrie d'un espace affine de dimension n est la composée d'au plus $(n+1)$ réflexion. Il suffit pour le démontrer de remplacer la médiatrice par des hyperplans médiateurs et de faire une récurrence finie.

Conséquence: L'ensemble des réflexions engendrent le groupe $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$.

Regardons plus précisément le cas des translations et des rotations:

Théorème 0.2.3.

- *Translation*
  Soient D et D' deux droites parallèles, alors

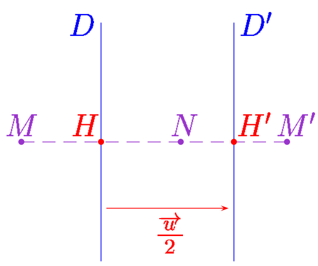
$$s_{D'} \circ s_D = t_{\overrightarrow{u}} \qquad \text{avec } \overrightarrow{u} \text{ normal à } D \text{ et } D' = t_{\frac{\overrightarrow{u}}{2}}(D).$$

  Réciproquement, toute translation se décompose en produit de deux réflexions d'axes parallèles.
- *Rotation*
  Soient D et D' deux droites sécantes en I, alors

$$s_{D'} \circ s_D = R_{I,\theta} \qquad \text{avec } \theta = 2(D, D')[2\pi].$$

  Réciproquement, toute rotation se décompose en produit de deux réflexions d'axes sécants.

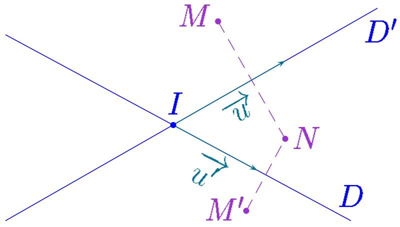
Démonstration. ◇ Soient D et D' deux droites parallèles, M un point du plan, $N = s_D(M)$, $M' = s_{D'}(N)$.



Si H et H' désignent les projetés orthogonaux de M sur D et D', on a $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{NM'} = 2\overrightarrow{NH'}$ d'où: $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$; ce dernier est un vecteur $\overrightarrow{u}$ indépendant de M, et l'on a $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$.

Considérons $t_{\overrightarrow{u}}$, on choisi une droite D orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et on trace la droite D' telle que $D' = t_{\frac{\overrightarrow{u}}{2}}(D)$ et en vertu de ce qui précède $t_{\overrightarrow{u}} = s_{D'} \circ s_D$.

◇ Soient D et D' deux droites sécantes en I de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$, un point M du plan, N son image par s_D, M' l'image de N par $s_{D'}$.



Les droites D et D' sont les bissectrices respectives de $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IN'}\right)$ ainsi

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IN}\right)[2\pi] \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'}\right)[2\pi].$$

En ajoutant, on a:

$$\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) = 2(D, D')[2\pi].$$

(On peut remarquer que cette égalité angulaire ne dépend pas du choix des vecteurs unitaires). Comme $IM = IN = IM'$, on passe de M à M' par une rotation de centre I et d'angle $2(D, D')[2\pi]$.
Soit $R_{I,\theta}$, on choisi une droite D passant par I, et on trace D' passant par I telle que $(D, D') = \frac{\theta}{2}[\pi]$ et en vertu de ce qui précède, on a $s_{D'} \circ s_D = R_{I,\theta}$.

■

0.3 Le groupe des déplacements.

Définition 0.3.1.
On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés de vecteurs. On note $\mathrm{Is}^+(\mathcal{P})$ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{P}$.
On dira qu'une isométrie qui ne conserve pas les angles orientés de vecteurs sont des antidéplacements et on notera $\mathrm{Is}^-(\mathcal{P})$ l'ensemble des antidéplacements de $\mathcal{P}$.

Théorème 0.3.2.
Soit f une isométrie. L'application f conserve les angles orientés si, et seulement si f est la composée d'un nombre pair de réflexions.

Démonstration. On sait qu'une reflexion s_D transforme les angles orientés de vecteurs en leurs opposés. Si $f = s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ \ldots \circ s_{D_m}$ conserve les angles orientés, alors $(-1)^m = 1$ donc m sera pair. Réciproquement, si $f = s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ \ldots \circ s_{D_{2m}}$, on associe les réflexions deux par deux pour écrire f comme m translations ou rotations qui conservent les angles orientés. ■

Conséquence: L'ensemble $\mathrm{Is}^+(\mathcal{P})$ est formé des translations et des rotations.

Corollaire 0.3.3.
L'ensemble $\mathrm{Is}^+(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$.

Démonstration. L'identité appartient à $\mathrm{Is}^+(\mathcal{P})$, soient f et g deux déplacements, alors $f \circ g^{-1}$ se décompose en un nombre paire de réflexions (car f et g s'écrivent comme produit d'un nombre pair de réflexions), c'est donc encore un déplacement. ■

0.4 Caractérisation par les points fixes.

Définition 0.4.1.
Une symétrie glissée du plan est le produit commutatif $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ parallèle à D.

Remarque: En utilisant la décomposition d'une translation en produit de deux reflexions, une symétrie glissée est la composée de trois réflexions, c'est donc un antidéplacement.

Proposition 0.4.2.

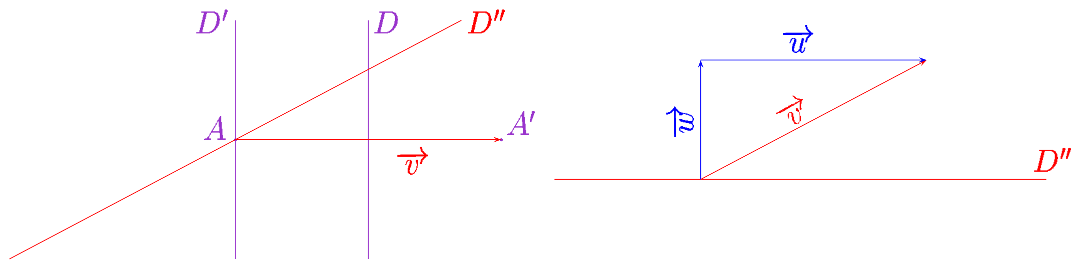
Invariants	Déplacements	Antidéplacements
$\mathcal{P}$	Id	$\times$
D	$\times$	s_D
I	$R_{I,\theta}, \theta \neq 0[2\pi]$	$\times$
$\emptyset$	$t_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	Symétrie glissée

Démonstration. Si l'ensemble des points fixes de f est $\mathcal{P}$ alors elle possède trois points fixes non alignés, d'où $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

Soit f une isométrie du plan $\mathcal{P}$ dont l'ensemble des points fixes est une droite D et $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \notin D$ et $f(M) = M'$. Par isométrie, pour tout point N de D, $NM = NM'$ et N est sur la médiatrice de $[MM']$ qui est donc D: M' est le symétrique de M par rapport à D et f est une réflexion d'axe D.

Soit f une isométrie possèdant un seul point fixe I, soit $A \in \mathcal{P}$ distinct de I, d'image A', D la médiatrice de $[AA']$ (elle passe par I car par isométrie $IA = IA'$) et $g = s_D \circ f$; alors g est une isométrie fixe en A et I donc en tout point de (AI). D'après ce qui précède $g = s_{D'}$ ($s_{D'}$ ne peut être l'identité, sinon f serait une réflexion, ce qui est absurde) et $f = s_D \circ s_{D'}$ ainsi f est une translation ou une rotation, c'est donc une rotation.

Si f ne possède aucun points fixes, soit A un point de $\mathcal{P}$, $f(A) = A'$. Considérons l'application $g = s_D \circ f$ où D est la médiatrice de $[AA']$, g fixe A; alors g est une rotation de centre A et d'angle θ. Ainsi $f = s_D \circ R_{A,\theta}$, d'après l'étude faite précédemment, on peut écrire $R_{A,\theta} = s_{D'} \circ s_{D''}$ avec $D' \cap D'' = \{A\}$ et D' parallèle à D. On a alors $f = s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''} = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_{D''}$. Puisque $A \notin D$, $\overrightarrow{v}$ n'est pas nul et comme il est orthogonal à D et D', il n'est pas orthogonal à D''. On peut écrire $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{u}$ parallèle à D'' et $\overrightarrow{w}$ orthogonal à D''.



On peut écrire $t_{\overrightarrow{w}} = s_{D'''} \circ s_{D''}$ avec D''' parallèle à D'' ainsi

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ s_{D''} = t_{\overrightarrow{u}} \circ (s_{D'''} \circ s_{D''}) \circ s_{D''} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{D'''},$$

c'est donc une symétrie glissée. ∎