Etude de la fonction $f : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

Cadre: On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Pré-requis:
- Les nombres complexes (en particulier, le module et l'argument d'un nombre complexe, leur représentation géométrique).
- Expression complexe des transformations du plan.
- Equations complexes des droites et des cercles.
- Image d'une droite ou d'un cercle par une translation et par une similitude.

Notation: Dans cet exposé, on notera A, B, C et M les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectifs a, b, 1 et z.

0.1 Etude de la fonction $f : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$, a, b dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq b$.

Remarque: On écarte le cas $a = b$ car l'application $f : z \mapsto 1$ est triviale.

Théorème 0.1.1.
L'application f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Sa réciproque est:

$$f^{-1} : z \mapsto \frac{bz - a}{z - 1}.$$

Démonstration. L'application f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{b\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{z-a}{z-b} = z' &\Leftrightarrow zz' - bz' = z - a \\
&\Leftrightarrow zz' - z = bz' - a \\
&\Leftrightarrow z(z' - 1) = bz' - a \\
\frac{z-a}{z-b} = z' &\Leftrightarrow z = \frac{bz' - a}{z' - 1} \quad \text{avec } z' \neq 1
\end{aligned}$$

de plus

$$\frac{z-a}{z-b} = 1 \Leftrightarrow a = b$$

or $a \neq b$, par conséquent le complexe $z' = 1$ n'admet aucun antécédent par f et tout nombre complexe $z' \neq 1$ possède un unique antécédent, à savoir $z = \frac{bz'-a}{z'-1}$. ■

✎ **Lemme 0.1.2.**
$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$,
$$f(z) = 1 + \frac{b-a}{z-b}.$$

Démonstration. En effet, $1 + \frac{b-a}{z-b} = \frac{z-a}{z-b}$. ■

✎ Théorème 0.1.3.
L'application f se décompose en $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ où
$$f_1 : z \mapsto z - b, \qquad f_2 : z \mapsto \frac{1}{z},$$
$$f_3 : z \mapsto (b-a)z \qquad \text{et} \qquad f_4 : z \mapsto z + 1.$$

Démonstration. C'est une simple traduction du lemme. ■

✎ **Propriétés 0.1.4.**
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$, on a:

(i)
$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{|z|^2 - \operatorname{Re}\left(\left(\overline{a+b}\right) z\right) + \operatorname{Re}\left(a\bar{b}\right)}{|z-b|^2}.$$

(ii)
$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{Im}\left(\left(\overline{a-b}\right) z\right) + \operatorname{Im}\left(a\bar{b}\right)}{|z-b|^2}.$$

(iii)
$$|f(z)| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{AM}{BM}.$$

(iv)
$$\arg f(z) = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right).$$

Démonstration. Pour (i) et (ii), on écrit:
$$\begin{aligned} \frac{z-a}{z-b} &= \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{b})}{|z-b|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - \bar{b}z - a\bar{z} + a\bar{b}}{|z-b|^2} \end{aligned}$$

Or
$$\operatorname{Re}(-\bar{b}z - a\bar{z}) = \operatorname{Re}(-\bar{b}z) - \operatorname{Re}(a\bar{z}) = \operatorname{Re}(-\bar{b}z) - \operatorname{Re}(\bar{a}z) = -\operatorname{Re}\left(\left(\overline{a+b}\right) z\right)$$

et
$$\operatorname{Im}(-\bar{b}z - a\bar{z}) = \operatorname{Im}(-\bar{b}z) - \operatorname{Im}(a\bar{z}) = \operatorname{Im}(-\bar{b}z) + \operatorname{Im}(\bar{a}z) = \operatorname{Im}\left(\left(\overline{a-b}\right) z\right).$$

Le (iii) et (iv) découlent directement des différentes définitions mises en jeu. ■

Remarque: L'application f est une homographie, c'est-à-dire une application de la forme:

$$g : z \longmapsto \frac{cz+d}{ez+f},\ (c,d,e,f) \in \mathbb{C}^4,\ cf - ed \neq 0.$$

$\left(g \text{ est définie sur } \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{f}{e}\right\} \text{ si } e \neq 0 \text{ et sur } \mathbb{C} \text{ tout entier lorsque } e = 0\right)$.

Exercices:

1. Montrer que g est bijective de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{f}{e}\right\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{c}{e}\right\}$. Déterminer sa réciproque.
2. Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré et $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ et $ad - bc = 1$.
   a) Montrer que $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.
   b) Soient $t : z \mapsto z+1$ et $s : z \mapsto -\frac{1}{z}$.
   On pose
   $$E = \left\{Id, s, t, t \circ s, s \circ t, s \circ t \circ s, t^{-1}, s \circ t^{-1}, t^{-1} \circ s, s \circ t^{-1} \circ s\right\}.$$
   Calculer les éléments de E.
   c) Montrer que $z \mapsto \frac{2z+1}{z+1}$ et $z \mapsto -\frac{z+4}{z+3}$ peuvent s'obtenir en composant différents éléments de E.

Démonstration. 1. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{f}{e}\right\}$,

$$\begin{aligned} \frac{cz+d}{ez+f} = z' \quad &\Leftrightarrow \quad ezz' + fz' = cz + d \\ &\Leftrightarrow \quad z(ez' - c) = d - fz', \end{aligned}$$

le complexe $z' = \frac{c}{e}$ n'a aucun antécédent par g car $cf - ed \neq 0$ c'est-à-dire $d \neq \frac{cf}{e}$ et tout nombre complexe $z' \neq \frac{c}{e}$ possède un unique antécédent, à savoir: $z = \frac{d - fz'}{ez' - c}$.

2.
a) $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Or $\mathbb{H}$ est connexe et de frontière égale à $\mathbb{R}$, on a donc $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ ou $g(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$.

$$\operatorname{Im} g(z) = \frac{(ad - bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2},$$

les signes des parties imaginaires de $\operatorname{Im} g(z)$ et $\operatorname{Im} z$ sont les mêmes donc $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

b)
- $t \circ s(z) = t\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} + 1 = \frac{z-1}{z}$.
- $s \circ t(z) = s(z+1) = \frac{-1}{z+1}$.
- $s \circ t \circ s(z) = s\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{z}{1-z} = \frac{-z}{z-1}$.
- $t^{-1}(z) = z - 1$.
- $s \circ t^{-1}(z) = s(z-1) = \frac{-1}{z-1} = 1 - \frac{z}{z-1}$.
- $t^{-1} \circ s(z) = t^{-1}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} - 1 = -\frac{z+1}{z}$.
- $s \circ t^{-1} \circ s(z) = s\left(-\frac{z+1}{z}\right) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}$.

c)

$$\frac{2z+1}{z+1} = 1 + \frac{z}{z+1} = t\left(\frac{z}{z+1}\right) = t \circ s \circ t^{-1} \circ s(z).$$

et

$$-\frac{z+4}{z+3} = -1 - \frac{1}{z+3} = t^{-1}\left(\frac{-1}{z+3}\right) = t^{-1} \circ s(z+3) = t^{-1} \circ s \circ t \circ t \circ t(z).$$

■

0.2 Lignes de niveau.

Définition 0.2.1.
Soit E une partie non vide de $\mathbb{C}$, h une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et k un réel. On appelle ligne de niveau k associée à h l'ensemble de points $M(z)$ de $\mathcal{P}$ tels que $h(z) = k$.

0.2.1 Lignes de niveau de $|f|$.

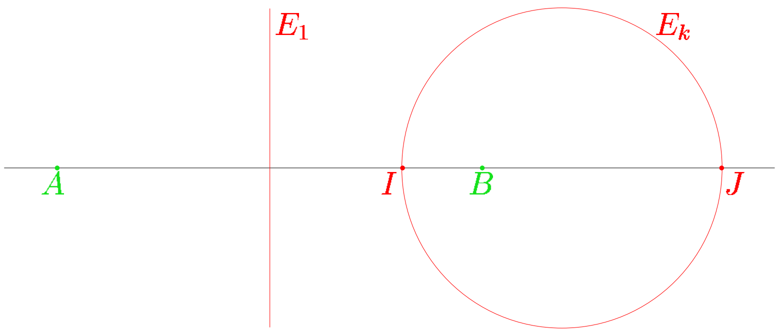
Posons,

$$E_k := \{M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{B\} : |f(z)| = k\}.$$

Proposition 0.2.2.

(i) Si $k < 0$: $E_k = \emptyset$.
(ii) Si $k = 0$: $E_k = \{A\}$.
(iii) Si $k > 0$:

- $k = 1$: E_1 est la médiatrice de $[AB]$.
- $k \neq 1$: E_k est le cercle de diamètre $[IJ]$ où I est le barycentre de $((A;1),(B;k))$ et J celui de $((A;1),(B;k))$.



Démonstration. (i) C'est évident.
(ii) Si $k = 0$, alors $|z - a| = 0$ d'où $z = a$.
(iii) Si $k \neq 0$:

- $k = 1$: $|z - a| = |z - b|$ d'où $MA = MB$.
- $k \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{MA}{MB} = k \\
&\Leftrightarrow \quad MA^2 = k^2 MB^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \\
\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0
\end{aligned}$$

donc E_k est le cercle de diamètre $[IJ]$.

■

Remarques:

- La construction de E_k à la règle et au compas est toujours possible et se ramène à la construction des barycentres I et J lorsque $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

- Si $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et si C est un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB) et tel que $\frac{CA}{CB} = k$ alors I et J sont les pieds des bissectrices issues de C du triangle ABC.

0.2.2 Lignes de niveau de $\arg f$.

Posons,

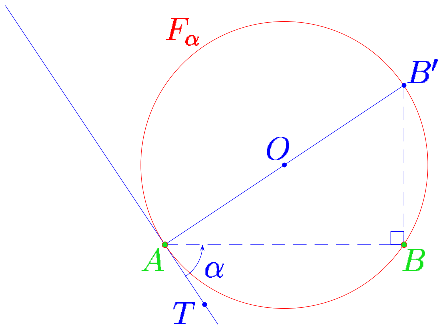
$$F_\alpha := \{M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{B\} : \arg f(z) \equiv \alpha[\pi]\}$$

et

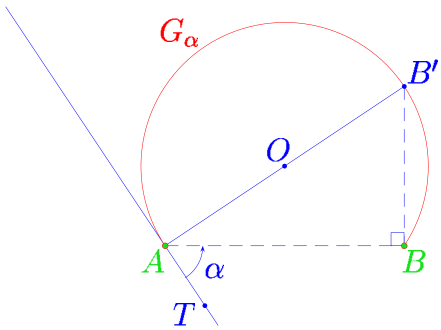
$$G_\alpha := \{M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{B\} : \arg f(z) \equiv \alpha[2\pi]\}$$

Proposition 0.2.3.

(i) Si $\alpha \equiv 0[\pi]$, alors $F_\alpha = (AB) \setminus \{B\}$.
(ii) Si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, alors $G_\alpha = (AB) \setminus]AB]$.
(iii) Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, alors $G_\alpha =]AB[$.
(iv) Si $\alpha \not\equiv 0[\pi]$: Soit $T \in \mathcal{P} \setminus \{B\}$ tel que $\left(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \alpha[2\pi]$, alors $F_\alpha = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent en B à $[BT]$.



(v) Si $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$: G_α est l'arc capable de $[AB]$ associé à α. C'est l'arc ouvert $]\overset{\frown}{AB}[$ de $\mathcal{C}$ contenu dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas T.



Démonstration. Les assertions (i), (ii) et (iii) sont évidentes.

(iv) $\arg f(z) \equiv \alpha[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \alpha[\pi]$

Soit B' le point diamétralement opposé à B. (BT) est tangente à $\mathcal{C}$ en B donc $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Le triangle ABB' est rectangle en A donc $\left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'A}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha$. Ainsi, d'après le théorème de l'arc capable:

$$\forall M \in \mathcal{C}, \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \alpha[\pi].$$

(v) C'est la même démonstration que (iv) en rappelant que les mesures principales qui sont de même signe se situent dans le même demi-plan.

■

0.3 Applications.

0.3.1 Colinéarité et orthogonalité.

Théorème 0.3.1.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$,

(i) Les points A, B, M sont alignés si, et seulement si

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}.$$

(ii) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux si, et seulement si

$$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration. Les résultats sont triviaux si deux des trois points A, B, M sont confondus; supposons les distincts.

(i)

$$\begin{aligned}
\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \arg\frac{z-a}{z-b} \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \text{les points } A,\ B,\ M \text{ sont alignés.}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \arg\frac{z-a}{z-b} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont orthogonaux.}
\end{aligned}$$

■

Exercice: Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que les points K, L, M d'affixes respectifs i, iz et z soient alignés.

Démonstration. Les points K, L, M sont alignés si, et seulement si $\frac{i-iz}{i-z} \in \mathbb{R}$. Or $i \cdot \frac{1-z}{i-z} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si $\frac{1-z}{i-z} \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\arg\left(\frac{1-z}{i-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Soit alors D le point d'affixe 1, on a:

$$\arg\left(\frac{1-z}{i-z}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MK}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Donc $E = \mathcal{C} \setminus \{D, K\}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[DK]$. ■

0.3.2 Critère de cocyclicité.

Théorème 0.3.2.
Quatres points distincts A, B, C, D du plan d'affixes respectifs a, b, c, d sont alignés ou cocycliques si, et seulement si

$$\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right)[\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}\right)[\pi]\end{aligned}$$

et le théorème de l'arc capable nous donne le résultat. ■

Remarque: $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ est appelé birapport (ou rapport anharmonique) du quadruplet (a, b, c, d) ou (A, B, C, D) et est noté $[a, b, c, d]$ ou $[A, B, C, D]$

0.3.3 Etude de l'application φ de $\mathcal{P}$ associée à f.

Notation: On appelle φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les applications de $\mathcal{P}$ associées à f_1, f_2, f_3, f_4.

Remarques: φ_1 et φ_4 sont des translations. φ_3 est une similitude directe de centre O et de rapport $|b-a|$. φ_2 transforme les droites et les cercles en cercle ou en droite, plus précisément:

Lemme 0.3.3.
Soient une droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}(I, r)$, $r > 0$.

(i) Si $O \in \mathcal{D}$: $\varphi_2(\mathcal{D} \setminus \{O\})$ est une droite passant par O, privée de O.
(ii) Si $O \notin \mathcal{D}$: $\varphi_2(\mathcal{D})$ est un cercle passant par O, privé de O.
(iii) Si $I = O$: $\varphi_2(\mathcal{C})$ est le cercle $\mathcal{C}\left(O, \frac{1}{r}\right)$.
(iv) Si $O \in \mathcal{C}$: $\varphi_2(\mathcal{C} \setminus \{O\})$ est une droite ne passant pas par O.
(v) Si $O \notin \mathcal{C}$: $\varphi_2(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant pas par O.

Démonstration. Une équation de $\mathcal{D}$ s'écrit:

$$\overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho = 0 \quad \text{avec } (\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}.$$

(i) Si $O \in \mathcal{D}$, alors $\overline{\omega}O + \omega\overline{0} + \rho = 0$ d'où $\rho = 0$; l'équation de $\mathcal{D}$ s'écrit:

$$\overline{\omega}z + \omega\overline{z} = 0.$$

Par définition, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, donc $\varphi_2(\mathcal{D} \setminus \{O\})$ a pour équation:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\omega}}{z} + \frac{\omega}{\overline{z}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{z\omega} + z\omega}{z\overline{z}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{z\omega} + z\omega}{|z|^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z\omega} + z\omega = 0,
\end{aligned}$$

c'est donc une droite passant par O, privée de O.

(ii) Si $O \notin \mathcal{D}$: $\overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho = 0$, ainsi pour $z \neq 0$, l'équation de $\varphi_2(\mathcal{D} \setminus \{O\})$ est:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\omega}}{z} + \frac{\omega}{\overline{z}} + \rho = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{\omega z} + \omega z + \rho z\overline{z}}{z\overline{z}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{\omega}z + \frac{\omega}{\overline{z}} + \rho = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{\omega z} + \omega z + \rho z\overline{z} = 0,
\end{aligned}$$

c'est donc un cercle passant par O, privé de O.

(iii) On cherche l'image de $\mathcal{C}(O, r)$ par φ_2: $\omega = 0$, $r = \sqrt{0 - k}$ c'est-à-dire $k = -r^2$, d'où l'équation:

$$z\overline{z} - r^2 = 0.$$

Ainsi en appliquant f_2, on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z\overline{z}} - r^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - r^2 z\overline{z} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \frac{1}{r^2} = 0,
\end{aligned}$$

c'est donc le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{r}$.

(iv) Si $O \in \mathcal{C}$, $k = 0$ et on a:

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = 0.$$

On applique f_2 et on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z\overline{z}} - \frac{\omega}{\overline{z}} - \frac{\overline{\omega}}{z} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \omega z - \overline{\omega z} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \omega z + \overline{\omega z} - 1 = 0,
\end{aligned}$$

c'est donc une droite ne passant pas par O.

(v) Si $O \notin \mathcal{C}$: l'équation de $\mathcal{C}$ est alors

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 \qquad \text{avec } k \neq 0.$$

En appliquant f_2, on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z\overline{z}} - \frac{\omega}{\overline{z}} - \frac{\overline{\omega}}{z} + k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \omega z - \overline{\omega z} + kz\overline{z} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \frac{\omega}{k}z - \frac{\overline{\omega}}{k}\overline{z} + \frac{1}{k} = 0,
\end{aligned}$$

c'est donc un cercle ne passant pas par O.

■

Théorème 0.3.4.
Soient une droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}(I,r)$ $(r>0)$. On note C le point d'affixe 1.

(i) Si $B\in\mathcal{D}$: $\varphi(\mathcal{D}\setminus\{B\})$ est une droite passant par C, privée de C.
(ii) Si $B\notin\mathcal{D}$: $\varphi(\mathcal{D})$ est un cercle passant par C, privé de C.
(iii) Si $I=B$: $\varphi(\mathcal{C})$ est le cercle $\mathcal{C}'\left(C,\frac{|b-a|}{r}\right)$.
(iv) Si $B\in\mathcal{C}$: $\varphi(\mathcal{C}\setminus\{B\})$ est une droite ne passant pas par C.
(v) Si $B\notin\mathcal{C}$: $\varphi(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant pas par C.

Démonstration. Rappelons que $\varphi=\varphi_4\circ\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1$.

(i) Si $B\in\mathcal{D}$: f_1 est une translation de vecteur $\overrightarrow{v}(-b)$, donc $\varphi_1(\mathcal{D})$ est une droite passant par O. Or $\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{D}\setminus\{B\})=\varphi_2\circ(\varphi_1(\mathcal{D})\setminus\{O\})$, donc d'après le lemme, c'est une droite passant par O, privée de O. φ_3 est une similitude directe de centre O donc $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C}\setminus\{B\})$ est une droite passant par O, privée de O. φ_4 est une translation de vecteur $\overrightarrow{v}(1)$ donc $\varphi(\mathcal{D}\setminus\{B\})$ est une droite passant par C, privée de C.
(ii) De la même manière, si $B\notin\mathcal{D}$, $\varphi_1(\mathcal{D})$ est une droite ne passant pas par O. $\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{D})$ est un cercle passant par O, privé de O. $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{D})$ est un cercle passant par O, privé de O. $\varphi(\mathcal{D})$ est un cercle de centre C, privé de C.
(iii) Si $I=B$, alors $\varphi_1(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon r. $\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{r}$. $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon $\frac{|b-a|}{r}$. Enfin, $\varphi(\mathcal{C})$ est un cercle de centre C et de rayon $\frac{|b-a|}{r}$.
(iv) Si $B\in\mathcal{C}$: $O\in\varphi_1(\mathcal{C})$, donc $\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C}\setminus\{B\})$ est une droite ne passant pas par O. $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C}\setminus\{B\})$ est une droite ne passant pas par O. $\varphi(\mathcal{C}\setminus\{B\})$ est une droite ne passant pas par C.
(v) Si $B\notin\mathcal{C}$: $O\notin\varphi_1(\mathcal{C})$, donc $\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant pas par O. $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant pas par O. Donc $\varphi(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant pas par C.

■

0.4 Compléments.

0.4.1 Equation complexe d'une droite et d'un cercle.

Proposition 0.4.1.

(i) Pour toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$, il existe $(\omega,\rho)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{R}$ tel que

$$M(z)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\overline{\omega}z+\omega\overline{z}+\rho=0.$$

(ii) Réciproquement, pour tout couple $(\omega,\rho)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{R}$, $\{M(z)\in\mathcal{P}|\overline{\omega}z+\omega\overline{z}+\rho=0\}$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\omega)$.
(iii) Pour tout cercle $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$, il existe $(\omega,k)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ tel que

$$M(z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow z\overline{z}-\overline{\omega}z-\omega\overline{z}+k=0.$$

(iv) Réciproquement, pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $\{M(z) \in \mathcal{P} | z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + k = 0\}$ est:
- ◇ $\emptyset$ si $|\omega|^2 < k$,
- ◇ $\{\Omega(\omega)\}$ si $|\omega|^2 = k$,
- ◇ le cercle de centre $\Omega(\omega)$, de rayon $\sqrt{|\omega|^2 - k}$ si $|\omega|^2 > k$.

Démonstration. (i) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan dont une équation est $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
On pose $z := x + iy$ et $\omega := a + ib$.

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\overline{\omega}z) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overline{\omega}z + \omega\overline{z}) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + 2c = 0 \\ M(z) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho = 0 \quad \text{en posant } \rho = 2c. \end{aligned}$$

(ii) On pose $z := x + iy$ et $\omega := a + ib$.

$$\begin{aligned} \{M(z) \in \mathcal{P} | \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho = 0\} &= \{M(z) \in \mathcal{P} | 2\operatorname{Re}(\overline{\omega}z) + \rho = 0\} \\ &= \{M(z) \in \mathcal{P} | 2(ax + by) + \rho = 0\} \\ &= \left\{M(z) \in \mathcal{P} | ax + by + \frac{\rho}{2} = 0\right\} \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation d'une droite dont le vecteur normal est $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(iii) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(\omega)$ $(\omega := a + ib)$ et de rayon R.

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow |z - \omega|^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (z - \omega)(\overline{z} - \overline{\omega}) = R^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \omega\overline{\omega} = R^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \underbrace{a^2 + b^2 - R^2}_{\in\mathbb{R}} = 0 \\ M(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 \quad \text{en posant } k = a^2 + b^2 - R^2. \end{aligned}$$

(iv) On pose $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$.

$$\begin{aligned} z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(ax + by) + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 + k = 0 \\ z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = |\omega|^2 - k \end{aligned}$$

- si $|\omega|^2 < k$, alors il n'y a pas de solution.
- si $|\omega|^2 = k$, alors $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (a, b)$, d'où $\mathcal{S} = \{\Omega(\omega)\}$.
- si $|\omega|^2 > k$, alors on pose $R^2 = |\omega|^2 - k$ et on obtient l'équation du cercle de rayon R et de centre $\Omega(\omega)$.

■