Equation cartésienne d'une droite du plan euclidien. Application à l'étude d'inéquations de la forme $a\cos t + b\sin t \geq c$.

Pré-requis:
- ◇ La structure d'espace affine euclidien dans la plan.
- ◇ La notion de vecteurs colinéaires et orthogonaux.
- ◇ La définition d'une droite (c'est un sous-espace affine de dimension 1).
- ◇ La notion de vecteur directeur et normal à une droite.
- ◇ La définition et les propriétés des fonctions trigonométriques.
- ◇ La définition d'un cercle et son équation.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Notation: Dans cet exposé, on notera $M(x, y)$ le point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées x et y.

0.1 Equation cartésienne d'une droite du plan.

Une droite $\mathcal{D}$ du plan est déterminée par un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$, puisqu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$. Pour désigner la droite $\mathcal{D}$, on utilisera désormais la notation naturelle: $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{n}^{\perp})$.

✎ **Théorème 0.1.1.**
Une droite $\mathcal{D}$ est un ensemble de points $M(x, y)$ vérifiant:

$$ax + by + c = 0, \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } (a, b) \neq (0, 0).$$

Réciproquement, si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, alors l'ensemble

$$\{M(x, y) \in \mathcal{P} \,|ax + by + c = 0\}$$

est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$.
La relation $ax + by + c = 0$ est alors appelée une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}\left(A, \overrightarrow{n}^{\perp}\right) \in \mathcal{P}$ où $A(x_0, y_0)$ et $\overrightarrow{n}(a, b)$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D}\left(A, \overrightarrow{n}^{\perp}\right) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -ax_0 - by_0 \end{aligned}$$

■

Notation: On utilisera l'écriture $\mathcal{D}(ax+by+c=0)$ pour désigner une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Remarques:

- Deux équations cartésiennes d'une même droite du plan sont proportionnelles.
- Lorsque $b \neq 0$, la relation $ax+by+c=0$ peut s'écrire $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ qui est l'equation réduite de la droite $\mathcal{D}(ax+by+c=0)$.

Définition 0.1.2.
On dit que deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont des vecteurs normaux colinéaires.

Proposition 0.1.3.
Les deux droites $\mathcal{D}(ax+by+c=0)$ et $\mathcal{D}'(a'x+b'y+c'=0)$ sont parallèles si, et seulement si $ab'-a'b=0$.

Démonstration. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab'-a'b=0.$$

■

Conséquence: Les deux droites $\mathcal{D}(ax+by+c=0)$ et $\mathcal{D}'(a'x+b'y+c'=0)$ sont sécantes si, et seulement si $ab'-a'b \neq 0$.

Corollaire 0.1.4.
Une équation cartésienne d'une droite parallèle à $\mathcal{D}(ax+by+c=0)$ s'écrit toujours

$$ax+by+\lambda=0 \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel.}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition précédente. ■

0.2 Résolution de $a\cos t + b\sin t \geq c$ pour a, b et c fixés.

Résoudre cette inéquation est équivalent à résoudre le système:

$$\begin{cases} ax+by \geq c \\ x^2+y^2=1 \end{cases}.$$

En effet, si $a\cos t + b\sin t \geq c$, on pose $x := \cos t$ et $y := \sin t$ pour obtenir ce qu'il faut. Si on a $x^2+y^2=1$, $x \in [-1,1]$ (sinon $y^2 = 1-x^2 < 0$ ce qui est absurde), ainsi il existe t tel que $\cos t = x$ et $\sin t = y$ et on retrouve notre problème initial.

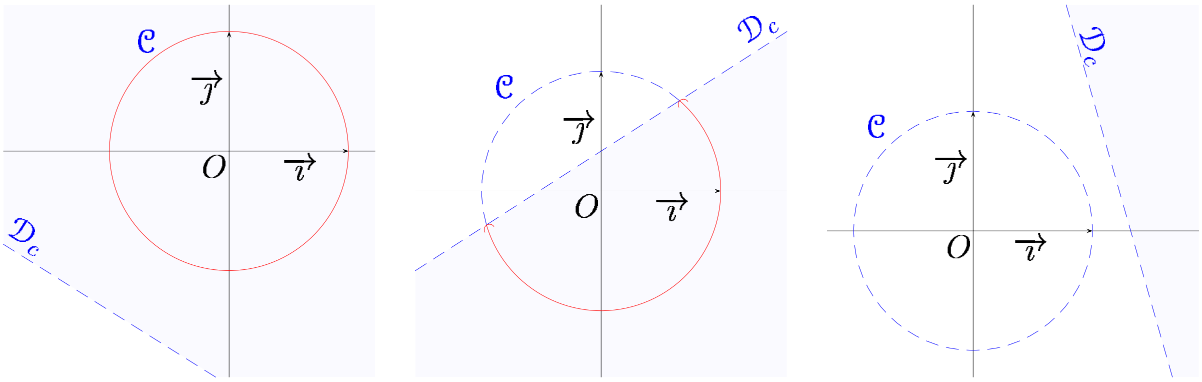
0.2.1 Géométriquement.

La relation $x^2+y^2=1$ est l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Lorsque $(a,b)=(0,0)$, $ax+by \geq c \Leftrightarrow 0 \geq c$; si $c \leq 0$, alors il n'y a pas de solution au sytème. Si $c \geq 0$, alors tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}$ est solution, on obtient alors que le cercle $\mathcal{C}$ est solution du système.

Lorsque $(a,b)\neq(0,0)$, $ax+by\geq c$ est l'ensemble des droites d'équation $\mathcal{D}_\gamma(ax+by-\gamma=0)$ avec $\gamma\geq c$; or, pour $a\neq 0$, une droite d'équation $ax+by-\gamma=0$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{\gamma}{a},0\right)$ donc l'ensemble en question est un demi-plan fermé délimité par $\mathcal{D}_c$ et contenant les points $\left(\frac{\gamma}{a},0\right)$ tels que $\gamma\geq c$.

Pour $a=0$, on considère l'intersection avec l'axe des ordonnées. On obtient alors les différentes solutions du système initial:



0.2.2 Analytiquement.

On écrit:

$$a\cos t+b\sin t=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right).$$

Soit θ un réel tel que $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (il existe toujours car $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ et $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$).

On a alors,

$$\begin{aligned}a\cos t+b\sin t &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos t+\sin\theta\sin t)\\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\theta)\end{aligned}$$

Donc

$$a\cos t+b\sin t\geq c\Leftrightarrow\cos(t-\theta)\geq\underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{:=K}.$$

Si $K>1$, alors il n'y a pas de solution à notre inéquation.

Si $K<-1$, alors tout réel t est solution.

Si $K\in[-1,1]$, la fonction arccos est une bijection strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$, ainsi pour $t\in[\theta,\theta+\pi]$, $\cos(t-\theta)\geq K\Leftrightarrow 0\leq t-\theta\leq\arccos K$, or la fonction cosinus étant impaire, pout tout $t\in[\theta-\pi,\theta+\pi]$,

$$\begin{aligned}\cos(t-\theta)\geq K &\Leftrightarrow -\arccos K\leq t-\theta\leq\arccos K\\ &\Leftrightarrow \theta-\arccos K\leq t\leq\theta+\arccos K.\end{aligned}$$

Par 2π-périodicité des fonction sin et cos, ce raisonnement reste valable pour $\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, on obtient alors que

$$t\in[-\arccos K+\theta+2k\pi,\arccos K+\theta+2k\pi].$$

0.3 Résolution de $a\cos t + b\sin t \geq c$ pour t et c fixés.

Dans ce paragraphe, on va se placer dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthonormé direct.

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal unitaire de $\mathcal{D}$, alors dans le repère direct il a pour composante $(\cos t, \sin t)$ et on obtient une équation de la droite de la forme

$$a\cos t + b\sin t - c = 0$$

souvent appelée l'équation d'Euler de la droite ou encore forme normale de l'équation de la droite.

Ainsi, comme précédemment, l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a\cos t + b\sin t \geq c$ est un demi-plan de frontière incluse $\mathcal{D}(a\cos t + b\sin t - c = 0)$ et contenant les points $\left(\frac{\gamma}{\cos t}, 0\right)$ avec $\gamma \geq c$ (ou les points $\left(0, \frac{\gamma}{\sin t}\right)$ avec $\gamma \geq c$ si $\cos t = 0$).