Ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale dans le plan. Applications (en particulier, projection orthogonale d'un cercle sur le plan).

Pré-requis:
- La structure d'espace affine du plan.
- Définition et propriétés d'une application affine.
- La dénition d'une ellipse par son équation réduite (et quelques propriétés s'y attachant).
- La définition et propriétés de la projection orthogonale (en particulier, on utilisera le fait que c'est une application affine)
- Le théorème de Thalès.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien E, muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Notation: Dans cet exposé, nous noterons $\mathcal{E}$ l'éllipse d'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{avec } a > b,$$

on notera $\mathcal{C}(O, a)$ son cercle principal et $\mathcal{C}(O, b)$ son cercle secondaire.

0.1 Ellipse et affinité orthogonale.

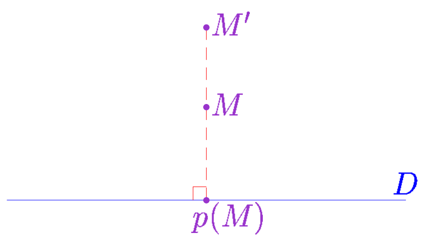
Définition 0.1.1.
Soit D une droite de E et k un réel non nul.
L'affinité orthogonale de base D et de rapport k est l'application:

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

tel que

$$\overrightarrow{p(M)M'} = k\overrightarrow{p(M)M}$$

où p désigne la projection orthogonale sur D.



Remarques:

- Si on prenait $k = 0$, on retrouverait la projection orthogonale p, mais avec $k \neq 0$ (comme dans la définition) f est bijective (en fait, son inverse sera l'affinité orthogonal de même base et de rapport $\frac{1}{k}$).
- Pour $k = -1$, on retrouve les symétries.
- Lorsque $k \neq 1$ l'ensemble des points invariants de f est D et si $k = 1$, $f = \mathrm{Id}$.

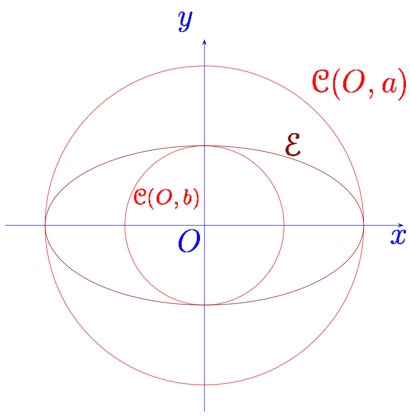
Proposition 0.1.2.
Une affinité orthogonale f est une application affine.

Démonstration. Soit f l'affinité orthogonale de base D et de rapport k et $\overrightarrow{p}$ la projection vectorielle orthogonale associée à p. Pour tout point M et N de E,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(M)p(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)f(N)} \\
&= -k\overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{MN}\right) + k\overrightarrow{p(N)N} \\
&= k\left(\overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)N}\right) + (1-k)\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
&= k\overrightarrow{MN} + (1-k)\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
\overrightarrow{f(M)f(N)} &= (k\mathrm{Id} + (1-k)\overrightarrow{p})\left(\overrightarrow{MN}\right).
\end{aligned}$$

■

Théorème 0.1.3.
L'ellipse $\mathcal{E}$ est l'image de son cercle principal $\mathcal{C}(O, a)$ (respectivement son cercle secondaire $\mathcal{C}(O, b)$) par l'affinité orthogonale de base (Ox) (respectivement (Oy)) et de rapport $\frac{b}{a}$ (respectivement $\frac{a}{b}$).
Réciproquement, l'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse.



Démonstration. Soit f l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$, son expression analytique dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ s'écrit:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases}.$$

L'équation de $\mathcal{C}(O,a)$ est $x^2+y^2=a^2$, donc celle de $f(\mathcal{C}(O,a))$ s'écrit

$$x'^2+\left(\frac{a}{b}y'\right)^2=a^2,$$

soit

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

et l'on aura bien $f(\mathcal{C}(O,a))=\mathcal{E}$.

Réciproquement, Soit f l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport k. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

L'expression analytique de f dans $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ s'écrit:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=ky \end{cases}$$

L'image $f(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par f sera donc d'équation

$$(x'-x_0)^2+\left(\frac{y'}{k}-y_0\right)^2=R^2,$$

ou encore

$$\frac{(x'-x_0)^2}{R^2}+\frac{(y'-ky_0)^2}{(kR)^2}=1.$$

On reconnaît alors l'équation réduite d'une ellipse de centre $\Omega(x_0,ky_0)$ d'axe de symétries les droites passant par Ω et parallèle à (Ox) et (Oy), et de longueurs de demi-axes R et $|k|R$. ■

Remarque: Une affinité étant une application affine, elle conserve les contacts, ainsi les tangentes aux cercles et à l'ellipse se correspondent.

Exercice: *Ellipse de Steiner.*

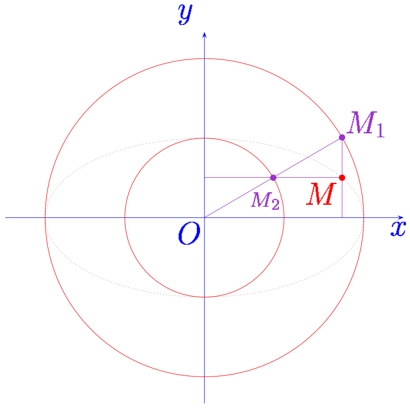
Soit ABC un triangle non plat. Montrer qu'il existe une unique ellipse inscrite dans ABC et tangente en les milieux des cotés.

Démonstration. Soit ABC un triangle non plat. On considère l'affinité orthogonale f_1 de base (BC) et de rapport k tel que $A'C=BC$ (ce rapport existe puisque BC est fixe par cette affinité. On considère ensuite l'affinité f_2 de base $(A'B)$ et de rapport k tel que $A'C''=A'B$. Comme C'' appartient à la médiatrice de $[BA']$ et passant par C on a $BC''=A'C''$, ainsi $A'BC''$ est un triangle équilatérale. Ainsi $f_2\circ f_1$ transforme ABC en un triangle équilatéral. Dans un triangle équilatéral, le cercle incrit tangent en les milieux des côtés, ainsi $(f_2\circ f_1)^{-1}$ transforme ce cercle en une ellipse inscrite dans ABC et tangente en les milieux des côtés (car une application affine conserve les contacts et les barycentres). ■

0.2 Applications.

0.2.1 Construction de $\mathcal{E}$ point par points.

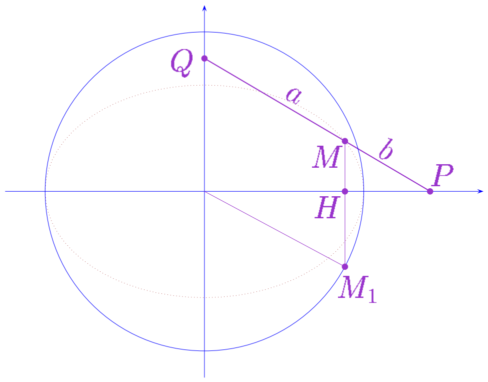
Tout point M de $\mathcal{E}$ est l'image d'un point M_1 de $\mathcal{C}(O, a)$ et d'un point M_2 de $\mathcal{C}(O, b)$ par les affinités considérées dans le théorème.



En utilisant le théorème de Thalès, on remarque que les points O, M_1 et M_2 sont alignés et on obtient une construction point par point de $\mathcal{E}$: on trace $\mathcal{C}(O, a)$ et $\mathcal{C}(O, b)$. A partir du d'un point M_1 de $\mathcal{C}(O, a)$, on peut obtenir M_2 et le point M comme intersection de parallèles aux axes passant par M_1 et M_2.

0.2.2 Construction de $\mathcal{E}$ par la méthode de la "bande de papier".

Proposition 0.2.1.
Soient P et Q deux points de E respectivement sur les axes (Ox) et (Oy) de sorte que la longueur PQ soit constante. Soit $M \in [PQ]$ tel que $MP = a$ et $MQ = b$ avec a et b deux constantes telles que $a + b = PQ$. Alors $M \in \mathcal{E}$.

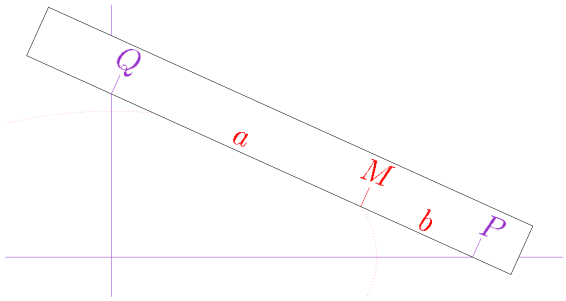


Démonstration. Soit M_1 le quatrième sommet d'un parallélogramme $OQMM_1$ et H le projeté orthogonal de M sur (Ox); comme $OM_1 = a$, M_1 décrit un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon a. D'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{\overline{HM}}{\overline{HM_1}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM_1}} = -\frac{b}{a}.$$

Ainsi, le point M est déduit de M_1 par l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport $-\frac{b}{a}$; celle-ci transforme le cercle $\mathcal{C}_1$ en l'ellipse d'axes (Ox) et (Oy) qui a pour demi-axes a et b. ■

Conséquence: On en déduit une construction de $\mathcal{E}$:



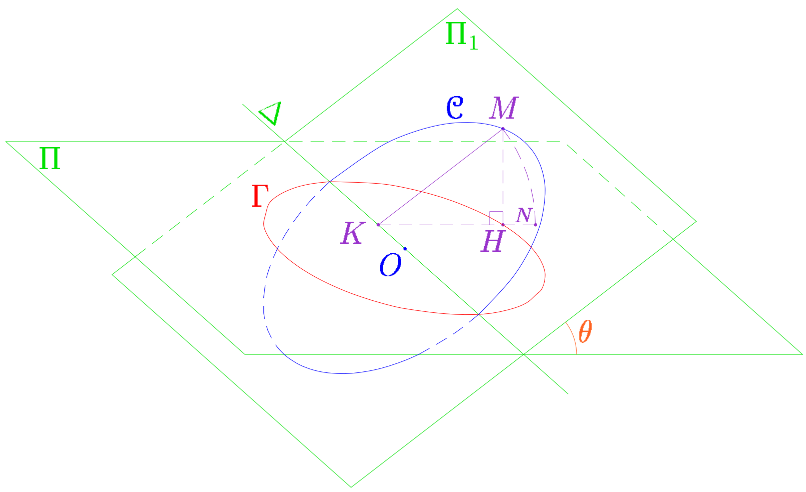
On marque P, Q, M sur le bord d'une bande de papier que l'on fait glisser de sorte que P et Q restent respectivement sur les axes (Ox) et (Oy).

0.2.3 Projection d'un cercle sur un plan.

Dans cette partie, on se place dans un espace euclidien E orienté de dimension 3.

Proposition 0.2.2.
Le projeté orthogonal d'un cercle de rayon R et de plan Π_1 , sur le plan Π non perpendiculaire à Π_1 est une ellipse de demi-axes R et $R\cos\theta$, où θ est l'angle géométrique des plan Π et Π_1 $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, de rayon R et de plan Π_1. Pour étudier le projeté orthogonal de $\mathcal{C}$ sur Π, on se ramène au cas où Π passe par O par une translation (l'image recherchée n'en sera pas changée).



La projection, qui à $M \in \mathcal{C}$ associe $H \in \Pi$, est la composée d'une rotation $M \mapsto N$ autour de la droite $\Delta = \Pi \cap \Pi_1$, avec l'affinité orthogonale, dans le plan Π, d'axe Δ et de rapport $\cos\theta = \frac{KH}{KM} = \frac{KH}{KN}$, où K est le projeté orthogonal de M sur Δ et θ est l'angle $\left(\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{KM}\right)$, mesuré dans le plan orthogonal à Δ en K. Il en résulte que l'image Γ de $\mathcal{C}$ est l'ellipse de demi-axes $OA = R$ et $OB = R\left|\cos\theta\right|$. ∎